Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и
стохастического анализа

# МОДЕЛЬ ИНДИВИДУАЛЬНОГО РИСКА

## АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Фоминовой Дарьи Олеговны

Научный руководитель
к. ф.-м. н. ______________ А. К. Смирнов

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н. ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2017

# ВВЕДЕНИЕ

В течении всей жизни человек сталкивается с разного рода рисковыми ситуациями. Риск присутствует во всех сферах жизнедеятельности общества. Рисковые ситуации сплошь и рядом окружают человека.

Риск — это совокупность значения возможного ущерба в некоторой стохастической ситуации и его вероятности.

Главная область, в которой применяется понятие риска – это страхование как средство противостояния разного рода опасностям. Опасность и случайность выступают как синонимы, это позволяет заключить, что страхование – это механизм борьбы с опасными случайностями или случайными опасностями.

Главной наукой, изучающей математические модели случайностей, является теория вероятностей, ее методы составляют основу математической теории риска – страховую математику.

Страховую математику можно поделить на две части: теорию риска, изучающую так называемые рисковые виды, отличные от страхования жизни и теорию страхования жизни. В данной работе рассматривается элементы именно первой части – теории риска.

Целью бакалаврской работы является построение и анализ математической модели индивидуального риска.

Объект исследования - деятельность страховой компании в рамках математической модели индивидуального риска.

Предмет исследования - оптимальная величина страховых премий, гарантирующая неразорение страховой компании.

Для достижения поставленных целей требуется смоделировать механизм работы страховой компании.

Для этого необходимо решить следующие задачи:

1. **д**ать описание математической модели индивидуального риска и основных задач, рассматриваемых в рамках модели;
2. **о**пределить необходимые понятия для описания деятельности страховой компании, как механизма перераспределения риска;
3. **п**ривести формулу для неразорения страховой компании с некоторой заданной вероятностью;
4. **о**пределить величину страховых премий, для обеспечения заданной ве-

роятности неразорения;

5. **о**пределить оптимальную страховую ставку.

Данная работа состоит из введения, основной теоретической части, разделенной на три части, заключения, списка использованной литературы и приложения.

В первом разделе определяются основные понятия для описания механизма работы страховой компании, деятельностью которой является перераспределение риска между ее клиентами. Приводится классификация математических моделей риска и возникающие задачи. Описан принцип выбора наименее рискованной стратегии в условиях неопределенности, а именно, как сравниваются рисковые ситуации. Рассматривается функция полезности, как она определяет предпочтения клиента, и как представляется механизм страхования с точки зрения клиента.

Второй раздел посвящен опианию классического вида модели индивидуального риска. Здесь описано условие неразорения страховой компании, а так же содержится описание точного метода подсчета вероятности разорения, приближение вероятности разорения Гауссовским законом распределения.

Рассматривается модель индивидуального риска в случае постоянных страховых премий.

В третьем разделе рассматривается пропорциональное страхование в условиях факторизационной модели индивидуального риска.

Из формулировки Общей теоремы получены формулы для расчета оптимальной страховой ставки в общем случае, а так же для детерминированного объема страхового портфеля и когда, объем - случайная величина.

Четвертый раздел работы представляет собой моделирование некоторого страхового портфеля. Получены практические значения оптимального страхового взноса, значения случайной величины итогового страхового резерва компании после выплат по предъявленным искам и практическую вероятность неразорения страховой компании. Программный код представлен в приложении А.

Значение страхования в современном мире трудно переоценить. Существование множественных рисковых ситуаций, окружающих человека и его деятельность, привело к развитию, так называемых механизмов перераспределения риска или компенсации ущерба. Одним из таких механизмов является создание страховой организации, целью которой является продажа страхового обеспечения клиентам.

Договоры по типу страхования, по размеру страховой суммы и другим причинам формируют в портфель. Объем страхового портфеля определяется количеством договоров. Предполагается, что в случае статической модели страхования портфель договоров сформирован единовременно, срок их действия одинаковый, и поведение страхового фонда до окончания действия договоров и характер процесса их заключения игнорируется [7].

В общем виде можно описать модель индивидуального страхового риска следующим образом: главной характеристикой деятельности страховой компании является случайная величина итогового страхового фонда или остатка средств страховой компании по некоторому фиксированному множеству договоров страхования - страховому портфелю

$$R = r + \sum_{j=1}^{N} Z_j - \sum_{j=1}^{N} Y_j,$$

где $r$ - начальный капитал страховой компании по данному страховому портфелю, $N-$ количество договоров страхования, включенных в страховой портфель, $Z_j-$ часть полной страховой премии, зачисляемая в страховой фонд по $j-$ договору страхования, $Y_j-$ полные, то есть за все время действия договоров, величины выплат страховщика то есть индивидуальных исков по всем договорам портфеля. Величина иска может принимать нулевое значение.

Основная задача страховой компании состоит в том, чтобы обеспечить прибыльность своей деятельности. Следует учесть, что в данном анализе деятельности страховой компании под страховой премией понимается только та часть взноса страхователя, которая зачисляется в страховой фонд, то есть в фонд, предназначенный для покрытия будущих страховых выплат, без учета надбавки на обеспечение условий труда.

Иначе говоря, на конечный момент действия договоров, после выплат всех индивидуальных исков фонд страховой компании должен быть ненулевой.

Рассматривается модель индивидуального риска при определенных условиях. Начальный капитал компании отсктствует, количество договоров в портфеле - определенная величина. Величиина страховойо премии одинаковая для всех договоров и $Z_j = Z$.

Тогда для момента времени, к которому действие всех договоров страхования данного страхового портфеля уже завершилось [10],

$$R = r + NZ - \sum_{j=1}^{N} Y_j.$$

Предположим, что существуют конечные моменты случайных величин, обозначим

$\alpha = MY-$ математическое ожидание, $\beta = DY-$ дисперсия.

а число $N$ достаточно велико для того, чтобы распределение случайной величины $\sum_{j=1}^{N} Y_j$ можно было аппроксимировать соответствующим нормальным распределением.

Тогда можно выписать следующую верную при $N \to \infty$ формулу

$$P\left(\sum_{j=1}^{N} Y_j \leq x\right) \sim \left(\frac{x - \alpha N}{\beta\sqrt{N}}\right),$$

где $(x)-$ стандартная нормальная функция распределения.

Согласно центральной предельной теореме при $N \to \infty$

$$P\left(R \geq 0\right) = P\left(\sum_{j=1}^{N} Y_j \leq ZN\right) \sim \left(\frac{Z - \alpha}{\beta}\sqrt{N}\right).$$

Если мы предполагаем вероятность неразорения $P(R \geq 0)$ не меньше $Q$, то наименьшее значение страховой премии $Z$, при котором выполняется это условие, удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$Z_0 \sim \alpha + \frac{\beta\psi(Q)}{\sqrt{N}},$$

где $\psi(Q)-$ обратная функция к функции $(x)$ [10].

Главная трудность страхования состоит в том, что случайные риски многих страхователей передаются страховщику в обмен на фиксированные страховые премии. Для страхователя это означает, что случайные, подчас весьма значительные финансовые потери заменяются фиксированными и много меньшими по размеру расходами – страховыми премиями. Для него решение о необходимости страхования сводится к вопросу о приемлемости величины страховой премии в отношении возможного ущерба.

Риски, принимаемые на страхование не одинаковы по своей вероятности наступления, величине ущерба, поэтому страховая премия каждого страхователя должна быть пропорциональна тому риску, от которого он защищается [13].

Для каждого отдельного договора случайная величина страховой выплаты клиенту связана не только со значением случайной величины ущерба клиента, но и со случайным характером страховой суммы, представляющей собой масштаб риска страховщика в момент страховой выплаты.

Предположим, что для любого $j-$ договора из страхового портфеля соответствует случайная величина $S_j$, называемая страховой суммой, такая что для всех элементарных исходов выполняется $Y_j \leq S_j$.

Обозначим отношение страховой выплаты к единице страховой суммы случайной величиной $X_j = \frac{Y_j}{S_j}$, назовем ее относительным иском.

При независимых $X_j S_j$ модель называется факторизационной [11]. При этом величина иска может быть представлена в виде произведения независимых случайных величин:

$$Y_j = X_j S_j,$$

выплаты $Y_j$ называются факторизационными. Пусть теперь страховая премия $Z_j$ для каждого $j-$ договора определяется с учетом случайной страховой суммы следующим образом

$$Z_j = zS_j,$$

где $z-$ постоянный для всех договоров портфеля некоторый коэффициент, назовем его ставкой страховой премии. Отметим, что $Z_j$ не может превышать $S_j$, по этому $z \geq 1$.

Основной задачей является определение такого минимального значения $z$, что результаты страховой деятельности по данному страховому портфелю в некотором смысле будут приемлемы для страховщика. В условиях факторизационной модели

$$R = r + zZ_j - X_jY_j,$$

$$R = r + \sum_{j=1}^{N} H_j,$$

где $H_J = S_j(z - X_j)$, случайные величины $N, H_1, H_2, \ldots$ независимы в совокупности, причем случайные величины $H_j$ одинаково распределены. Пусть начальный капитал не используется, объем портфеля $N$ постоянная величина, $\eta_i$ однородны и одинаково распределены и $R = \sum_{j=1}^{N} H_j$ для того что бы апроксимировать распределение случайной величины $\sum_{j=1}^{N} H_j$ соответствующим нормальным законом предположим, что $N \to \infty$.

Тогда справедливо

$$P\left(\sum_{j=1}^{N} H_j \leq x\right) \sim \left(\frac{(x - NdES)}{\left(g\sqrt{N}\right)}\right).$$

Тогда в условиях факторизационной модели индивидуального риска приближенной значение страховой савки определяется следующей формулой

$$z \sim A + \left(\frac{B\sqrt{(1+V^2)}\psi\left(Q\right)}{\sqrt{\left(N - V^2\right)\psi^2\left(Q\right)}}\right),$$

где $V^2$ - коэффициент вариации $S_j$,

$A, B$ - математическое ожидание и дисперсия величины оптимального иска $X_j$.

Формулы для вычисления оптимальной страховой ставки можно получить воспользовавшись доказанной в 16 общей теоремой.

Общая теорема содержит формулу для получения асимптотической страховой ставки, когда объем портфеля имеет произвольное распределение при условии, что случайная величина $R$ асимптотически нормальна.

Отклонение функции распределения $F(x)$ случайной величины от функции распределения $(x)$ стандартной нормальной случайной величины описывает неравенство Берри-Эссена

$$\rho(F(x), \Phi(x)) \leq C_B E L_N^3,$$

где

$$L_N^3 = \frac{E \mid X \mid^3}{\sigma^3 \sqrt{N}}$$

- дробь Ляпунова третьего порядка, а $C_B E$ - постоянная Берри- Эссена [17].

**Теорема.** Пусть при

$$\Lambda = EN \to \infty,$$

случайная величина $R$ асимптотически нормальна[18]

$$R = \frac{(R - ER)}{\sqrt{DR}}$$

и

$$\delta = \mid P(R < x) - (x) \mid \to 0.$$

Предположим, задана доверительная вероятность $(1/2 < Q < 1)$ и $q = \psi(Q)$. Пусть

$$\omega = o(\Lambda) \to \infty, \Lambda \to 0,$$

тогда,

1. *если существует абсолютная постоянная $C' < 1$, для которой справедливо*

$$\frac{r}{ES} \leq C' q \sqrt{(1 + V^2)} B \sqrt{(\Lambda - \omega q^2)},$$

*то есть такое $\Lambda_0$, которое зависит от $C'$, такое что при выполнении условия $\Lambda > \Lambda_0$ оптимальная страховая ставка имеет вид*

$$z \sim A + \frac{q\sqrt{(1 + V^2)} B}{\sqrt{\Lambda - \omega q^2}} - \frac{\frac{r}{Es}}{(\Lambda - \omega q^2)} + \varepsilon,$$

*где*

$$\mid \varepsilon \mid \leq C(Q) \frac{\sqrt{1 + V^2} B}{\Lambda^2} \left[ \beta + \frac{\omega}{\Lambda} \right]$$

*и $C(Q)$ - константа, зависящая от того, какой уровень доверия задан.*

2. *Е*сли

$$q\sqrt{(1+V^2)}B\sqrt{(\Lambda-q^2)} \leq \frac{r}{ES} \leq q\sqrt{(1+V^2)}B\sqrt{\Lambda},$$

то найдется такое $\Lambda_1$, что при $\Lambda > \Lambda_1$ оптимальная страховая ставка равна

$$z = A + \epsilon,$$

где

$$\mid \varepsilon \mid \leq C(Q)\frac{\sqrt{1+V^2}B}{\Lambda^2}\left[\delta + \frac{\omega}{\Lambda}\right].$$

3. *Если существует $C'' > 1$ такое, что*

$$\frac{r}{Es} \geq C''q\sqrt{(1+V^2)}B\sqrt{\Lambda},$$

*то существует $\Lambda_2$, зависящее от $C''$, такое что при $\Lambda > \Lambda_2$ оптимальная страховая ставка равна*

$$z = A.$$

Результат теоремы справедлив для произвольного распределения случайной величины $N$[14]. В работе на основании теоремы получены выражения для оптимальной страховой ставки в случае, когда объем страхового портфеля определен и для случая, когда $N$ случайная величина распределенная по закону Пуассона [19].

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главная задача страховой компании в условиях статической модели – не допустить превышения суммарной величины выплат, над величиной страхового фонда. Прибыльность деятельности страховщика определяется правильно выбранной страховой ставкой, а значит, и достаточной величиной страховых взносов. В данной работе была рассмотрена модель индивидуального риска и приведены расчеты оптимальной величины страховой ставки. Таким образом, цель работы достигнута.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1 Хитрова Е. М. Актуарные расчеты : учеб. пособие / Е. М. Хитрова. Иркутск : Изд-во БГУ, 2015. - 118 с.

2 Гвозденко А. А. Основы страхования : учебник / А. А. Гвозденко. М.: Финансы и статистика, 2001. - 304 с.

3 Глухова, Е. В. Математические модели страхования / Е. В. Глухова, О. А. Змеев, К. И. Лившиц. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. - 180 с.

4 Ротарь, В.И. Бенинг, В.Е. Введение в математическую теорию страхования / В. И. Ротарь, В. Е. Бенинг // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1994, т.1, вып.5

5 Фишберн, П. С. Теория полезности для принятия решений / П. С. Фишберн. М.: Наука, 1978. - 352 с.

6 Де Гроот, М. Оптимальные статистические решения / М. Де Гроот; под ред.: Ю. В. Линника, А. М. Кагана; пер. с англ.: А. Л. Рухина. М.: Мир, 1974. - 492 с.

7 Бондарев, Б. В. Математические модели страхования / Б. В. Бондарев. Донецк: АПЕКС, 2002. - 116 с.

8 Фалин, Г.И. Математический анализ рисков в страховании / Г. И. Фалин. М.: РЮИД, 1994. - 130с.

9 Фалин, Г.И. Фалин, А.И. Теория риска для актуариев в задачах / Г. И. Фалин, А. И. Фалин. М.: Мир, 2004. - 240с.

10 Королев, В.Ю. Математические основы теории риска / В. Ю. Королев, В. Е. Бенинг, С. Я. Шоргин. М.: Физматлит, 2011. — 591с.

11 Малиновский, В. К. Расчет общего числа страховых выплат и предельные теоремы теории вероятностей /В. К. Малиновский // Страховое дело. 1995. № 1. С.42-46.

12 Основы страховой деятельности. Учебник / отв. ред. проф. Федорова Т.А. М.: Изд-во БЕК, 1999 - 776 с.

13 Ширяев, А.Н. Теория риска / А. Н. Ширяев. М: МГУ, 1957. 581с. 1

14 Шоргин, С. Я. Асимптотическая оценка оптимальных страховых премий в условиях факторизационной модели индивидуального иска /С. Я. Шоргин // Теория вероятн. и ее примен., 1997. Т.4, Вып. 1, С.125-156.

15 Шоргин, С. Я. Методика вычисления страховой нетто-ставки , обеспечивающей устойчивость страховоой деятельности для рисковых видов страхования / С. Я. Шоргин, С. Н. Сурков // Вестник РОСС, Вып. 2. С.75-78.

16 Шоргин, С. Я. Асимптотические оценки оптимальных страховых тарифов на основе факторизационной модели индивидуального иска / С. Я. Шоргин // Эконом. и матем. методы, 1996. Т. 32, Вып. 2. С.127-137.

17 Шоргин, С. Я. Факторизационная модель страхового иска и асимптотические оценки оптимальных страховых ставок / С. Я. Шоргин // Рукопись деп. в ВИНИТИ 04.11.96, № 3210-В96.

18 Петров, В. В. Суммы независимых случайных величин / В. В. Петров. М.: Наука, 1972. 416 с.

19 Ширяев, А.Н. Вероятность: в 2 т. / А. Н. Ширяев. М.: МЦНМО, 2004. Кн.1 - 520 с. Кн.2 - 408 с. 3-е изд.

20 Королев, В. Ю. О неравенствах типа Берри-Эссена для пуассоновских случайных сумм / В. Ю. Королев, И. Г. Швцова, С. Я. Шоргин // Информ. и ее примен., 2011 Т. 5, Вып. 3. С.64-66.

21 Страуструп Б. Язык программирования C++ / Б. Страуструп. М.:Бином, 2011. - 1136с.