Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

Численный анализ математических моделей экономики

Автореферат бакалаврской работы

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Варнакова Романа Александровича

Научный руководитель
д.ф.-м.н, профессор П.А. Терёхин
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д. ф.-м. н., доцент С.П. Сидоров
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Быстрое развитие рыночной экономики в XX веке в США и других развитых западных странах породило целый ряд экономических моделей, описывающих производственные циклы как микроэкономики, так и экономики государства в целом. Эти модели описываются дифференциальными уравнениями первого и высших порядков. Таким образом, возникла необходимость численного решения данных уравнений, используя всевозможные математические методы нормировки и аппроксмации.

На практике прогнозирование роста ВВП (национального дохода) экономики в будущем, за счет известных параметров предыдущих лет, таких как потребление, накопление и инвестирование денежных средств, имеет очень большое практическое значение. На сегодняшний день актуальна проблема оптимального распределения имеющихся ресурсов и эффективного управления производственными фондами. Возможность определить, какова зависимость увеличения или уменьшения ВВП государства от производственных коэффициентов деловой активности имеет стратегическую значимость для анализа рынка.

Актуальность определила выбор **темы** данной работы: «Численный анализ математических модлей экономики».

Целью работы является изучение некоторых динамических моделей экономики: модели Кейнса, Самуэльсона -Хикса, Колдора; исследование численных методов решения дифференциальных уравнений, описывающих динамические модели экономических процессов.

Объект и предмет исследования - математические модели экономики и метод Хаара решения задачи Коши.

Исследование имеет **практическую значимость**. Имея входные данные, можно спрогнозировать рост экономики в следующем году.

1 Основное содержание работы

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух теоретических и двух практических глав, заключения, списка использованных источников и приложений.

Введение содержит основные положения: актуальность темы исследования; цель, объект, предмет, задачи исследования; практическую значимость исследования.

В первой главе «Экономика как динамическая система» раскрывается хозяйственная суть экономических систем, рассматривается производственные циклы,рост и снижение ВВП в эих циклах, значимость коэффициентов предельного потребления и замещения, предельных инвестиций, валовое потребление. Также вводятся очень важные понятия акселератора и мультипликатора Кейнса.

Всего рассмотрены 3 основных модели экономического роста: Кейнса, Самуэльсона -Хикса, Колдора и ряд других менее известных моделей.

Экономическая система (ЭС) - это совокупность национальных хозяйственных единиц, находящихся в производственно-технологических и организационно-хозяйственных связях. ЭС состоит из 2-х подсистем: производственной и финансово-кредитной. Элементы системы могут быть статическими и динамическими. Статический элемент мгновенно преобразует вход x в выход $y = F(x)$. Время t одинаково для входа и выхода. В динамическом элементе выход в любой момент времени зависит от входа не только в настоящий момент t, но и от значений входа в прошлые моменты времени t-1, t-2. . . ..

Например, в статической форме линейная связь между национальным доходом N и потреблением C в любой год t представлена записью $C = aN$, где a– доля фонда потребления в национальном доходе.

В динамике: $C_t = a_0N_1 + a_1N_{t-1} + a_2N_{t-2}$, т.е. потребление в текущий год t зависит от величины национального дохода не только настоящего, но и предшествующих годов.

Система называется динамической, если в ее составе имеется хотя бы один динамический элемент.

Например, в динамической модели Кейнса экономика трактуется как один динамический элемент.

В модели предполагается, что спрос на инвестиционные товары постоянен а спрос на потребительские товары в будущем году есть линейная функция ВВП текущего года: $C^D_{t+1} = C + cY_t$, где c - нижняя граница фонда непроизводственного потребления; 0<c<1 = предельная склонность к потреблению.

Динамическая модель Кейнса возникает, если приравнять планируемый выпуск товаров конечного пользования прогнозируемому спросу на них:

$$Y_{t+1} = C + cY_t + I$$

Рассмотрим базовый и наиболее популярный вариант модели взаимодействия мультипликатора и акселератора – модель Самуэльсона-Хикса. Она включает в себя только рынок благ и предполагает, что уровень цен, относительные цены благ и ставка процента являются неизменными. В соответствии с кейнсианской концепцией также предполагается, что объем предложения совершенно эластичен. Так как модель динамическая, все переменные являются функциями времени $x_t = f(t)$.

Объем потребления домохозяйств в текущем периоде определяется величиной их дохода в предшествующем периоде:

$C_t = C_{a,t} + cY_{t-1}$, где C_a - автономное потребление

Предприниматели осуществляют автономные инвестиции, объем которых при заданной ставке процента фиксирован, и индуцированные инвестиции, зависящие от приращения совокупного спроса (национального дохода) в предшествующем периоде:

$I_t = I_{a,t} + k(Y_{t-1} - Y_{t-2})$

При принятых предположениях экономика будет находиться в равновесии, если

$Y_t = C + cY_{t-1} + r(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + A_t$ где r –коэффициент акселерации(ускорения), $0 < r < 1$, $A_t = C_{f,t} + I_{a,t} + G_t$.

Отличие динамической модели Самуэльсона-Хикса от динамической модели Кейнса состоит в отказе от постоянства инвестиций и введение их переменной части, которая пропорциональна приросту ВВП текущего года по сравнению с прошлым годом

Как и модель Самуэльсона-Хикса, модель Калдора состоит только из рынка благ. Однако в данной модели функции сбережений и инвестиций являются нелинейными.

Калдор исходил из того, что в коротком периоде объем инвестиций зависит от величины реального национального дохода: $I = I(Y)$. Причем эта зависимость неодинакова при различных уровнях экономической активности. При низком уровне занятости рост национального дохода почти не увеличивает инвестиции, так как имеются свободные производственные мощности. Малоэластичны инвестиции по доходу и в периоды избыточной занятости и высокого уровня национального дохода, так как в такие периоды инвестирование связано с большими издержками из-за высоких ставок процента и заработной платы. В фазе подъема, то есть, при переходе от низкой к высокой занятости, эластичность инвестиций по доходу больше единицы в связи с ростом реального капитала.

В XX веке наибольшее распространение получили два основных класса моделей экономического роста: посткейнсианские и неоклассические. Эти модели основываются на различных исходных предпосылках и приводят к противоположным выводам относительно устойчивости равновесного роста и факторов, определяющих его темп.

Характерная особенность посткейнсианских моделей экономического роста состоит в том, что в них технология производства представлена производственной функцией с взаимодополняемыми ресурсами (производственная функция Леонтьева):

$Y = \min(qN, \sigma K)$

Наиболее известными посткейнсианскими моделями экономического роста являются модели Е.Домара и Р.Харрода. Динамическое равновесие (равновесный рост), согласно посткейнсианским моделям, неустойчиво, и поэтому необходимо государственное регулирование экономического роста. Неустойчивость равновесного роста в посткейнсианских моделях вытекает из предпосылок о постоянстве цен и взаимодополняемости факторов производства.

Во второй главе «Численное решение дифференциального уравнения первого порядка методом сплайн-аппроксимации» описывается применение системы Хаара к численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' + a(x)y = b(x), \qquad 0 \le x \le 1,$$

$$y(0) = y_0.$$

Предположим, что функции $a(x), b(x) \in C[0,1]$ непрерывны на $[0,1]$.

Для построения приближенного решения задачи Коши фиксируем натуральное число $n \in \mathbb{N}$. Производную $y_n'(x)$ искомого приближенного решения $y_n(x)$ будем искать в виде ступенчатой функции

$$y_n'(x) = c_{n,k}, \qquad \tfrac{k}{n} < x < \tfrac{k+1}{n}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Во внутренних точках разрыва $\frac{k}{n}$, $k = 1, \ldots, n-1$, значение ступенчатой функции $y_n'(x)$ полагаем равным полусумме $\frac{c_{n,k-1}+c_{n,k}}{2}$, на концах отрезка - $c_{n,0}$ и $c_{n,n-1}$, соответственно. Постоянные $c_{n,k}$, $k = 0, \ldots, n-1$ подлежат последующему определению.

Прежде, чем указать те условия, из которых будут найдены значения $\{c_{n,k}\}_{k=0}^{n-1}$, восстановим функцию $y_n(x)$ по ее производной с учетом начального условия $y_n(0) = y_0$. Получим

$$y_n(x) = y_0 + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-1} c_{n,j} + c_{n,k}(x - \tfrac{k}{n}), \qquad \tfrac{k}{n} \le x \le \tfrac{k+1}{n}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Видим, что функция $y_n(x)$ является кусочно-линейной (сплайном первой степени) с узлами $\frac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$.

Произвольным образом выберем набор промежуточных точек $x_{n,k} = \frac{k+\theta_{n,k}}{n}$, где $0 < \theta_{n,k} < 1$, $k = 0, \ldots, n-1$. Потребуем, чтобы для функции $y_n(x)$ дифференциальное уравнение обращалось в равенство в точках $x_{n,k}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Это требование запишем в виде системы уравнений

$$c_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-1} c_{n,j} + \frac{\theta_{n,k}}{n} c_{n,k}\right) = b_{n,k}, \qquad k = 0, \ldots, n-1, \qquad (2.1)$$

где для краткости обозначили $a_{n,k} = a(x_{n,k})$ и $b_{n,k} = b(x_{n,k})$.

Заметим, что система (2.1) является системой n линейных алгебраических уравнений первого порядка с n неизвестными. Кроме того, при выполнении условия

$$\|a\| = \max_{x\in[0,1]} |a(x)| < n,$$

что будет верно для достаточно больших n, уравнения системы (2.1) представляют собой рекуррентные соотношения и позволяют корректно и однозначно определить значения неизвестных $c_{n,k}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Наряду с системой уравнений (2.1) рассмотрим систему

$$c_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-1} c_{n,j}\right) = b_{n,k}, \qquad k = 0, \ldots, n-1, \qquad (2.2)$$

в которой мы опустили слагаемое, содержащее параметр $\theta_{n,k}$. Система (2.2) также является системой линейных алгебраических уравнений первого порядка и неизвестные $c_{n,k}$, $k = 0, \dots, n-1$, находятся с помощью рекуррентных (для любого n) соотношений

$$c_{n,k} = b_{n,k} - a_{n,k}\left(y_0 + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-1} c_{n,j}\right), \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Пусть функция z_n построена по набору постоянных $\{c_{n,k}\}_{k=0}^{n-1}$, которые образуют решение упрощенной системы (2.2), и при выборе промежуточных точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{n-1}$, являющихся серединами отрезков $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, т.е. $\theta_{n,k} = \frac{1}{2}$, $k = 0, \dots, n-1$. Пусть, далее, $y(x)$ - точное решение задачи Коши, которое существует и единственно.

Теорема 1. *Пусть $n > \|a\|$. Тогда при любом выборе промежуточных точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{n-1}$ справедлива оценка*

$$\|y_n' - z_n'\| \le \frac{2(|y_0|\|a\| + \|b\|)\|a\|e^{3\|a\|}}{n}.$$

Теорема 1 показывает, что аппроксимационные свойства приближенных решений $y_n(x)$ принципиально не зависят от выбора промежуточных точек и сходны с аппроксимационными свойствами функции $z_n(x)$. Поведение последних устанавливает

Теорема 2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\|y' - z_n'\| \le e^{\|a\|}\big(|y_0|\omega(a, \tfrac{1}{n}) + \omega(b, \tfrac{1}{n}) + e^{\|a\|}(|y_0|\|a\| + \|b\|)(\omega(a, \tfrac{1}{n}) + \tfrac{\|a\|}{n})\big),$$

где $\omega(f, \delta) = \sup_{|x_1 - x_2| \le \delta} |f(x_1) - f(x_2)|$ - равномерный модуль непрерывности.

Теорема 2 дает оценку скорости сходимости приближенных решений $z_n(x)$ (и вместе с ними $y_n(x)$) к точному решению $y_n(x)$ задачи Коши. Следует отметить, что оценки уклонений $\|y_n - z_n\|$ и $\|y - z_n\|$ повторяют оценки теорем

1 и 2 для производных. Теоремы 1 и 2 доказаны в статье [2].

В приложении представлен исходный программный код реализации системы Хаара к численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка. Результатом компиляции программы является таблица роста ВВП за год с числом интервалов 12.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было продемонстрировано, что в экономике для описания различных моделей производственных циклов широко применяется математический аппарат, в частности, различные способы нахождения приближенного значения ВВП.

Результатами работы являются:

- были изучены некоторые динамические модели экономики: модели Кейнса, Самуэльсона-Хикса, Колдора;

- исследованы численны методы решения дифференциальных уравнений, описывающих динамические модели экономических процессов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Стечкин, С.Б., Субботин, Ю.Н. *Сплайны в вычислительной математике*-2-е изд. / Стечкин, С.Б., Субботин, Ю.Н.; под общей редакцией И.Е. Морозова - Москва. Изд-во Наука. ун-та, 1976.- С. 248.

2. Лукомский, Д.С., Лукомский, С.Ф., Терехин, П.А. *Применение системы Хаара к численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка* / Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика, 2016. Т. 16. вып.

3. Р.Аллен *Математическая экономия* - 1-изд. / Пер. с англ. под редакцией А.И. Латышева. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.- С. 648.

4. Глухов, В.В., Медников, М.Д., Коробко, С.Б. *Математические методы и модели для менеджмента* - 2-е изд., испр. и доп. / СПб, 2005. — С. 528.

5. Мэнкью, Н.Г. *Макроэкономика* / Пер. с англ. - М.: Изд-во МГУ, 1994. - С. 736.

6. Сакс, Д., Ларрен, Ф. *Макроэкономика. Глобальный подход* / Пер с англ - М.: Дело, 1996. - С. 326.

7. Багриновский, К., Матюшок, В. *Экономико-математические методы и модели* / М.: Дело, 1999. - С. 349.

8. Агапова Т.А., Серёгина С.Ф. *Макроэкономика: Учебник* / Под общей ред. д.э.н., проф. Сидоровича А.В.; МГУ им. М.В. Ломоносова – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во «Дело и Сервис», 2001. – 448 с. – (Серия «Учебники МГУ им. М.В. Ломоносова»).

9. Бункина М.К., Семёнов А.М., Семёнов В.А. *Макроэкономика: Учебник.* – 3-е изд., перераб и доп. – М.: Изд-во «Дело и Сервис», 2000. – 512 с.

10. Тарасевич Л.С., Гальперин В.М., Гребенников П.И., Леусский А.И. *Макроэкономика:Учебник* / Общая редакция Тарасевич Л.С. Изд. 3-е, перераб . и доп. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 1999. – 656 с.

11. Блауг М. *Кейнсианская система. Экономическая мысль в ретроспективе* / Economic Theory in Retrospect. — М.: Дело, 1994. — С. 607-629. — XVII, 627 с.

12. Кейнс Дж. М. *Общая теория занятости, процента и денег* / Пер. с англ. проф. Н. Н. Любимова; под ред. д.э.н., проф. Л. П. Куракова.— М.: Гелиос АРВ, 2002.

13. Абель Э., Бернанке Б. *Макроэкономика* / Пер. с англ. Н. Габенова, А. Смольского; научн. ред. д.э.н., проф. Л. Симкина. — СПб.: Питер, 2008.

14. *История экономических учений: Современный этап: Учебник* / Под общ. ред. А. Г. Худокормова. — М.: ИНФРА-М, 2009.

15. Варга Е. С.*О причинах популярности кейнсианства* / Избранные произведения: В 3 томах. — М.: Наука, 1974. — Т. 3. Капитализм после Второй мировой войны. — С. 468-495. — 555 с.

16. Скидельски Р. *Джон Мейнард Кейнс. 1883—1946. Экономист, философ, государственный деятель.* - В 2-х книгах./Пер с англ.- М.: Московская школа политических исследований, 2005.

17. *Современная экономическая мысль* / Под ред. С. Вайнтрауба; пер. с англ. . — М.: Прогресс, 1981. — 816 с.

18. Блауг М. *Неоклассическая теория денег, процента и цен* / Экономическая мысль в ретроспективе — М.: Дело, 1994. — С. 586-606. — XVII, 627 с.

19. Вайнтрауб С.*Хиксианское кейнсианство: величие и упадок* / Современная экономическая мысль. — М.:Прогресс, 1981. — С. 91-121.

20. Мишкин Ф.*Экономическая теория денег, банковского дела и финансовых рынков.* — М.: Аспект Пресс, 1999. — С. 563. — 820 с