Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

Реализация алгоритмов стохастического динамического программирования с приложениями к задачам оптимального инвестирования

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Каюмовой Анастасии Борисовны

Научный руководитель
д.ф.-м.н., доцент ____________ ____________ С.П. Сидоров

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., доцент ____________ ____________ С.П. Сидоров

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Динамическое программирование - это метод, осуществляющий поиск оптимального решения задач. Впервые термин «динамическое программирование» был употреблен Ричардом Беллманом в 40-х годах 19 века. Основная идея динамического программирования достаточно проста и состоит в следующем. Для решения существующей задачи, следует разделить её на некоторые подзадачи, решить их, а затем объединить решения в одно общее решение. Довольно часто, можно столкнуться со случаем, когда эти подзадачи подобны. Суть подхода динамического программирования как раз и заключается в том, чтобы получить решение каждой подзадачи только один раз, то есть таким образом уменьшить количество вычислений.

Стохастическое динамическое программирование является одним из частей оптимального программирования. Его методами решаются задачи с критериями оптимальности, с набором критериев оптимизации, с некоторыми отношениями между переменными и целевой функцией, с помощью системы уравнений или неравенств.

Динамическое программирование используется как для решения динамических процессов или систем, так и для статических процессов, связанных с распределением ресурсов. Вопросы, касающиеся использования динамического программирования являются актуальными в различных областях экономики и менеджмента. Из-за высокой востребованности в решении управленческих задач проводятся многочисленные исследования этих вопросов отечественными зарубежными математиками и экономистами. Разработан ряд методов и моделей, предназначенных для предприятий различного характера. Это свидетельствует о том, что метод является востребованным для решения многих управленческих задач.

Целью работы является изучение теоретических основ динамического программирования для стохастического и детерминированного случая, применение численных методов для решения экономических задач, а также решение задачи оптимального инвестирования с помощью программной среды Scilab.

Объект исследования - стохастическое динамическое программирование.

Предмет исследования - применение стохастического динамического программирования к экономической модели.

Для достижения поставленных целей в работе необходимо решить следующие **задачи**:

- раскрыть понятие динамического программирования;
- раскрыть понятие стохастического динамического программирования и изучить его методы, а также рассмотреть численные методы детерминированного программирования;
- рассмотреть модель оптимального инвестирования и разработать численный метод решения задачи ;
- с помощью программной среды Scilab реализовать алгоритмы решения этой задачи.

Теоретико-методологической основой исследования являются труды, описывающие математические методы в программировании и экономике (Беллман Р.[1], Дрейфус С. [3], Фомин Г.П. [2]).

Для решения поставленных задач были использованы следующие теоретические методы исследования: анализ, моделирование, синтез, сравнение.

Практическая значимость – разработка программного продукта, позволяющего выполнить моделирование экономической задачи, которая может быть использована для решения как учебных, так и задач, основанных на реальных данных.

Основное содержание работы

Введение содержит основные положения: актуальность темы исследования, цель, объект, предмет, задачи исследования, практическую значимость исследования.

В первой главе "Динамическое программирование" дается определение динамического программирования, рассматривается уравнение Беллмана и доказываются теоремы, связанные с этим уравнением, а именно: принцип сжимающих отображений и достаточные условия Блэквелла. Уравнение Беллмана, которое является основой динамического программирования. Это уравнение дает возможность найти множество оптимальных стратегий для x и y в каждый момент времени t, которое определяется как:

$$V(x_t) = \max_{y_t \in D(x_t)} u(x_t, y_t) + \beta V_i(x_{t+1}),$$

где $V(x_t)$ - функция ценности, x_t - переменная состояния, y_t - управляющая переменная, $D(x_t)$ - допустимое множество всех управлений в состоянии x_t, $u(x_t, y_t)$ - дисконтированная сумма будущих выплат.

Иными словами, решение уравнение Беллмана состоит в нахождении неподвижной точки или во введении такого оператора T, который находил бы эту неподвижную точку следующим образом:

$$V_{i+1} = TV_i,$$

где T - выступает перечнем операций, участвующих в расчете уравнения Беллмана.

Алгоритм решения будет заключаться в следующем:

1. Сделать начальное предположение о функции ценности $V_0(x_t)$.
2. Определить $V_{i+1}(x_t)$, используя уравнение Беллмана:

$$V_{i+1}(x_t) = \max_{y_t \in D(x_t)} u(x_t, y_t) + \beta V_i(h(x_t, y_t)),$$

3. Если $V_{i+1}(x_t) = V_i(x_t)$, то будет найдена неподвижная точка и задача будет решена. Иначе следует вернуться у пункту 2 и повторить процесс до равенства в точке.

Теорема 1.(Принцип сжимающих отображений). Если пара (S, p) является полным метрическим пространством и $T : S \to S$ является сжимающим отображением с модулем $\beta \in (0, 1)$,то:
1. T имеет ровно одну неподвижную точку $V \in S$, такую, что $V = TV$.
2. Для любого $V \in S : p(T^n V_0, V) < \beta^n p(V_0, V), n = 0, 1, 2, ...$

Теорема 1 имеет большое значение. Поскольку она устанавливает, что любой оператор, который обладает свойством сжатия, будет показывать единственную неподвижную точку. Также эта теорема даёт фактический метод приближенного нахождения решения уравнения Беллмана. Помимо прочего, принцип сжимающих отображений нашел свое применение при остроении итерационных процессов. Следующая теорема представляет собой достаточные условия Блэквелла, она обеспечит условия для функции сжатия.

Теорема 2. (Достаточные условия Блэквелла). Пусть X - метрическое пространство и $B(X)$ - пространство ограниченных, непрерывных функций $V : X \to R$. А $T : B(X) \to B(X)$ является оператором, удовлетворяющим следующим условиям:

1. (Монотонность) Если $V, W \in B(X) V(x) \leqslant W(x)$ для всех $x \in X$, то $TV(x) \leqslant TW(x)$ для всех $x \in X$.

2. (Дисконтирование) Существует некоторая константа $\beta \in (0, 1)$, такая, что для всех $V \in B(X), a \geqslant 0$ и любых $x \in X$:

$$T(v + a) \leqslant TV + \beta a,$$

Тогда оператор T является сжимающим отображением с модулем β.

Теорема 2 дает простые инструменты для проверки, будет ли рассмотренная задача задачей сжатия, а значит позволяет убедиться, является ли простой алгоритм, определенный ранее, подходящим для имеющейся задачи.

Численные методы детерминированного программирования основаны на принципе сжимающих отображений, применяющегося к решению уравнения Беллмана. К ним относятся итерация по критерию с использованием интерполяции, итерация по стратегиям с использованием метода Говарда.

Рассмотренным методом является метод Говарда,с помощью которого можно ускорить сходимость описанного алгоритма. Его преимущество заключается в том, что в нем итерация совершается относительно стратегии, а не функции ценности, как в других численных методах детерминированного программирования.

Во втором разделе "Стохастическое динамическое программирование" рассматривает стохастическое динамическое программирование. Освящает такие вопросы как дискретизация шоков, уравнение Беллмана с его выводом и методы его решения - итерация по критерию и итерация по стратегиям.

Для стохастического случая определяется такая функция ценности, где в качестве аргумента выступает как переменная состояния x_t, так и стационарный шок s_t, причем последовательность $\{s_t\}_{t=0}^{+\infty}$ удовлетворяет соотношению:

$$\{s_{t+1}\} = \Phi(s_t, \varepsilon_{t+1}),$$

где ε - белый шум, то есть случайный процесс, у которого $M(\varepsilon) = 0$ и $D(\varepsilon) = \sigma^2$. Поэтому уравнение Беллмана выглядит следующим образом:

$$V(x_t, s_t) = \max_{\{y_t \in D(x_t, s_t)\}_{r=0}^{\infty}} u(x_t, y_t, s_t) + \beta M_t V(x_{t+1}, s_{t+1}),$$

Одной из важных проблем, возникающей при интерации по критерию и итерации по стратегиив стохастической среде является дискретизация пространства, натянутого на шоки. Действительно, использование непрерывной поддержки стохастических шоков становится невыполнимым для компьютера, он в свою очередь может иметь дело только с дикретной поддержкой. Необходимо преобразовать непрерывную задачу в дискретную со следущим ограничением: асимптотические свойства в непрерывных и дискретных процессов должны быть одинаковыми.Требуется найти ответ на вопрос: существует ли такое дискретное представление для S, что оно эквивалентно его непрерывному исходному представлению. Ответ на данный вопрос утвердительный. В частном случае, если мы имеем дело с процессами авторегрессии AR(1), то можно воспользоваться таким понятием как цепи Маркова.

Она представляет собой стохастический процесс с дискретным индексированием S, таким, что условное распределение s_{t+1} является независимым от всех предыдущих состояний, дающих s_t.

$$\pi_{ij} = P(s_{t+1} = s_j | s_t = s_i), s_i, s_j \in S,$$

Все элементы модели цепи Маркова могут быть закодированы в матрице вероятности перехода:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & ... & \pi_{1M} \\ ... & ... & ... \\ \pi_{M1} & ... & \pi_{MM} \end{pmatrix}.$$

Как и в детерминированном случае, так и в стохастическом сходимость процесса итерации по критерию обеспечивается принципом сжимающихся отображений. Стохастический случай отличается лишь тем, что в нём выбирается сетка значений шоков s вместе с матрицей перехода $\Pi = (\pi_{ij})$ и в итерации по стратегии сталкиваемся с различными правилами принятия решений.

В третьем разделе "Применение стохастического динамического программирования для решения задачи оптимального инвестирования" за пример задачи стохастического динамического программирования берется задача оптимального инвестирования с дискретным временем и непрерывным состоянием. Для неё рассматривается численный метод решения, реализующийся с помощью программной среды Scilab для двух разных способов приближения: многочленами Чебышева и многочленами Бернштейна.

Обозначим x_t значение непрерывной переменной состояния в дискретный момент t. Пусть θ_t означает состояние дискретного стохастического процесса в момент t, эволюция которого зависит от случайного процесса $(\varepsilon_t)_t \geqslant 0$. Задача стохастического динамического программирования с бесконечным горизонтом имеет вид:

$$V(x_0, \theta_0) = \max_{y_t \in D(x_t, \theta_t)} E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(x_t, y_t), \tag{1}$$

$$x_{t+1} = g(x_{t+1}) = g(x_t, \theta_t, y_t), \theta_{t+1} = h(\theta_t, \varepsilon_t),$$

где (x_0, θ_0) есть начальное состояние, $D(x_t, \theta_t)$ есть допустимое множество всех управлений в состоянии (x_t, θ_t), $E(\cdot)$ есть математическое ожидание, $\beta \in (0,1)$ есть дисконтирующий множитель, $u(\cdot,\cdot)$ есть функция полезности, переход в новое состояние определяется функцией g, которая зависит как от текущего состояния (x_t,θ_t), так и от управления y_t, а функция h описывает дискретную траекторию стохастической переменной θ. Решение задачи стохастического динамического программирования (1) основано на использовании уравнения Беллмана

$$V(x,\theta) = \max_{y_t \in D(x,\theta)} (u(x,y) + \beta E\{V(x',\theta')|x,\theta,y\}), \tag{2}$$
$$x' = g(x,\theta,y), \theta' = h(\theta,\varepsilon),$$

где $V(x,\theta)$ есть значение функции Беллмана в состоянии (x,θ), (x_0,θ_0) есть состояние в следующий период времени при условии нахождения в состоянии (x,θ) в текущий момент времени, переход в новое состояние определяется функцией g, $D(x,\theta)$ есть допустимое множество всех управлений в состоянии $(x,\theta), h$ описывает траекторию стохастической переменной θ,ε есть случайная переменная. Будем полагать, что $(\theta_t)_t \geqslant 0$ есть цепь Маркова, то есть стохастический процесс с конечным множеством дискретных состояний $S = \{s_1,...,s_d\}$, с матрицей вероятностей переходов $\Pi = (\pi_{jk}), \pi_{jk} = P(s_{t+1} = s_k|s_t = s_j)$.

Рассмотрим следующий алгоритм решения задач динамического программирования с итерациями функции выигрыша. Алгоритм использует аппроксимацию функции выигрыша элементами некоторого параметрического семейства функций вида $\widetilde{V}(\,\cdot\,;\mathbf{c})$, где $\mathbf{c}$ есть вектор значений параметров. Алгоритм состоит в последовательном итерационном нахождении функции из заданного параметрического класса, которая удовлетворяет уравнению Беллмана с заданной точностью.

1. Инициализация.
    - Выбирается сетка $X = \{\chi_i\}_{1\leq i\leq m}$ в пространстве состояний.
    - Выбирается функциональная форма $\widetilde{V}(\,\cdot\,;\mathbf{c})$.
    - Используем некоторый метод для вычисления $\mathbf{c}_p^0$ таких, чтобы функции $\widetilde{V}(\cdot;\mathbf{c}_p^0)$ аппроксимировали данные $\{(\chi_i, u(\chi_i,s_p))\}$, $1\leq i\leq m$, $1\leq p\leq d$.
    - Выбираем точность $\varepsilon > 0$ для критерия останова.

- Полагаем $\varepsilon_0 = 1$, $t = 0$, $v_{ij}(0) = 0$.

2. Цикл пока $\varepsilon_t \geq \varepsilon$

   - Шаг 1 (Оптимизация). Вычисляем для каждого $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq d$

   $$v_{ij}(t+1) = \max_{y \in D(\chi_i, s_j)} \left(u(\chi_i, s_j, y) + \beta \sum_{p=1}^{d} \pi_{jp} \widetilde{V}(\chi_i'; \mathbf{c}_p^t) \right),$$

   где $\chi_i' = h(\chi_i, s_j, y)$.

   - Шаг 2 (Аппроксимация). Вычисляем такие $\mathbf{c}_p^{t+1}$, чтобы функции $\widetilde{V}(\,\cdot\,; \mathbf{c}_p^{t+1})$ аппроксимировали данные $\{(\chi_i, v_{ip}(t)\}$.

   - Полагаем $\varepsilon_t = \max_{i,j} |v_{ij}(t+1) - v_{ij}(t)|$.

   - Полагаем $t = t + 1$.

3. Вывод $\widetilde{V}(\chi; \mathbf{c}_{j^*}^{t+1})$, где s_{j^*} есть начальное состояние процесса $(s_j)_{j \geq 0}$.

Результаты показывают, что использование многочленов Бернштейна и операторов M_n на шаге 2 алгоритма приводит к более стабильной работе по сравнению с классическим методом приближения на основе линейной комбинации многочленов Чебышева. С другой стороны, ошибка приближения операторами Бернштейна является высокой, так как на классе дважды дифференцируемых функций операторы Бернштейна дают порядок приближения не выше n^{-1}.

В приложении представлены исходные программные коды реализации задачи оптимального инвестирования с использованием многочлена Бернштейна, а также численное выражение процесса сходимости алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, динамическое программирование представляет собой математический метод, с помощью которого осуществляется поиск оптимального решения для управления многошаговыми процессами. Под такими процесссами подразумевается такие, при которых происходит последовательный переход объекта или системы от одного состояния в другое, причём эти состояния изменятся во времени или поэтапно. Особенность стохастического программирования состоит в том, что в задачах некоторые параметры, входящие в целевую функцию и ограничения, накладываемые на решение, представляют собой случайные величины, то есть отражают реальные условия выбора решения, в отличие от задач в условиях полной определенности.

В ходе данной работы было рассмотрено динамическое программирование, основой которого является уравнение Беллмана. При этом динамическое программированне приведено для двух случаев: детерминированного и стохастического. Для стохастического программирования предложены численные методы, основанные на принципе сжимающих отображений, которые можно применить для решения задачи оптимального инвестирования.

С помощью программной среды Scilab были реализованы алгоритмы решения этой задачи, в которых на шаге аппроксимапции применяется такой подход, как приближение с помощью многочленов Бернштейна. Метод на основе полиномов Бернштейна сохраняет форму функции, в отличие от случая с аппроксимацией по Чебышеву, где принцип сохранения формы функции отсутствует.

Результаты работы алгоритмов для решения задачи оптимального инвестирования показывают, что использование многочленов Бернштейна приводит к более стабильной работе по сравнению с методом приближения на основе линейной комбинации многочленов Чебышева.

Список использованных источников

[1] Беллман Р. Динамическое программирование.-М.: Издательство иностранной литературы, 1960 - с.400.

[2] Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности.- М.: Финансы и статистика, 2005 – с.616.

[3] Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования.-М.:Наука, 1965.

[4] Джадд К. Численные методы в экономике.-М.:МИТ Пресс, 1998.

[5] Сюдсетерб К., Верк П. Справочник по математике для экономистов.- СПб.:Экономическая школа, 2000 - с.229.

[6] Туманова Е.А., Шагас Н.Л. Макроэкономика. Элементы продвинутого подхода. - М.:ИНФРА-М, 2004. - С.400.

[7] Бойцов Д. И., Миронов С. В., Файзлиев А. Р., Сидоров С. П. Об одном алгоритме для решения задачи стохастического динамического программирования с бесконечным горизонтом // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : Издат. центр "Наука". 2016. С. 87-89.