

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и  
стохастического анализа

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ УДЕРЖАНИЯ РИСКА В  
ЭКСЦЕНДЕНТНОМ ДОГОВОРЕ ПРИ ПЕРЕСТРАХОВАНИИ  
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 412 группы  
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика  
механико-математического факультета  
Пичугина Ильи Эдуардовича

Научный руководитель

к. ф.-м. н.

\_\_\_\_\_

Е. В. Гудошникова

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н.

\_\_\_\_\_

С. П. Сидоров

Саратов 2017

## ВВЕДЕНИЕ

С приходом в Россию рыночных отношений все сферы бизнеса, в том числе и страхование, приобрели рыночные черты. Как следствие, страховой полис стал товаром, а значит обязан подчиняться различным законам рыночной экономики, в том числе и законам ценообразования. Но если верхняя граница цены страхового полиса определяется также, как и для промышленных товаров и зависит от потребительского спроса на него, то определение нижней границы имеет значительные отличия. Нижняя ценовая граница для промышленных товаров устанавливается, по сути, себестоимостью, поскольку даже огромное желание увеличить объём продаж, привлечь новых потребителей или вытеснить конкурентов, не позволит вести дела себе в убыток, продавая товары ниже их себестоимости. Этот принцип неприменим для страхования, поскольку для него не имеет смысла такое понятие как себестоимость, ведь нельзя же определять цены страхового полиса исходя из цен на страховые бланки и зарплат сотрудников. И всё же, определение цены страхования подчиняется строгим математическим и экономическим законам.

По существу страхование заключается в том, что страховщик предлагает клиентам заключить договор, по условиям которого клиент платит компании небольшой взнос, и тогда при возникновении несчастного случая, оговорённого в договоре, страховщик выплатит клиенту сумму, которая значительно превышает взнос клиента. Теоретически возможны крайние ситуации, то есть может не произойти ни одного страхового случая и тогда компания получит огромную прибыль, но может так случиться, что у каждого клиента случится несчастный случай, и тогда компания получит огромный долг и возможно разорится. Конечно, страховые компании интересуют при какой цене на страховые договора можно иметь приемлемую вероятность разорения, но при этом получать прибыль. То есть весомое значение приобретает вероятность страхового случая. Эта вероятность определяется специалистами-статистиками. Риск компании, вероятность её разорения, определяется специалистами в одной из областей математики - актуарной математики.

Очень большое количество аспектов деятельности компаний, связанных с риском, охватывается актуарной математикой. В значительной мере методы актуарной математики основаны на методах теории вероятности. Они позволяют произвести расчёты для определения взноса клиента при заключении

страхового договора. Задача актуария состоит в том, чтобы на основе реальных данных об исследуемом процессе определить тенденции этого процесса, его основные закономерности и на основе прогноза об этом процессе, спланировать финансовую деятельность компании, которая обеспечит оптимальные результаты, то есть принесёт компании наибольшую прибыль, сохраняя риск разорения компания приемлемым.

В условиях рынка, часто, особенно молодым компаниям, приходится устанавливать фактический страховой взнос, ниже актуарно правильного, рассчитанного из соображений надёжности. В таком случае, приходится прибегать к дополнительным мерам по повышению надёжности, таким как перестрахование. Это и определяет актуальность данной работы

Актуальность определила выбор темы данной работы: "Выбор оптимальной границы удержания риска в эксцедентных договорах при перестраховании".

Целью работы является получение формулы для расчета оптимальной границы удержания риска в эксцедентных договорах.

Объектом исследования - математическая модель эксцедентного перестрахования.

Предметом исследования - оптимальна граница удержания риска.

Для достижения поставленных целей в работе необходимо решить следующие задачи:

- рассмотреть основные понятия и концепции страхования;
- рассмотреть основные модели перестрахования;
- получить формулу для выбора оптимальной границы удержания риска в простейшем случае;
- обобщить полученную формулу на общий случай.

Практическая значимость работы определяется актуальностью вопроса перестрахования как средства оптимизации тарифной политики страховой компании.

## 1 Основное содержание работы

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основных определений, трёх глав, заключения, списка использованных источников и двух приложений.

Первая раздел носит вспомогательный характер. Сначала в нём обсуждаются основные концепции перестрахования, и определив сущность перестрахования, определяются основные составляющие страхового взноса клиента.

При определении величины страхового взноса компания должна руководствоваться следующими соображениями:

1. Излишни большой взнос будет негативно сказываться на количестве клиентов. Поэтому неосторожное повышение взноса может привести не к увеличению выручки, как хотелось бы страховой компании, а к убыткам и возможно разорению на фоне снижения конкурентоспособности.
2. Маленький страховой взнос, конечно, может привлечет клиентов, но также приведет к увеличению числа возможных страховых исков. Собранный суммы может не хватит на выплату всех возмещений, а ведь хотелось бы получить ещё и прибыль. Видно, что заниженный страховой взнос также ведёт к разорению.

Из этих рассуждений мы и приходим к так называемому правилу Байеса, которое можно сформулировать следующим образом: минимально возможная величина взноса (не дающая прибыли, но и не ведущая к разорению) должна отвечать условию: в каждый момент времени сумма собранных взносов равна сумме выплаченных возмещений.

Правило Байеса абстрактно и идеализировано, но оно отражает собой главную идею, лежащую в основе расчетов по определению страхового взноса. При его практическом использовании необходимо учитывать следующие соображения.

Во-первых, выплата взносов и возмещений по одному и тому же договору происходит не мгновенно, это процесс растянутый во времени. Страховая компания не может знать заранее сколько понадобится произвести ей страховых возмещений, но при этом должна заранее определить величину страхового взноса, а значит можно говорить только о средних вероятностных значениях, то есть, математических ожиданиях рассматриваемых случайных

величин.

Во-вторых, в случае если договор заключен на относительно долгий срок, то нужно учитывать такой фактор, как изменение цены денег.

Теперь, учитывая, что, по сути, то всё чем рискует клиент это его страховой, а всё чем рискует страхования компания - возмещение, которая она должна выплатить при наступлении страхового случая, то применяя правило Байеса к реальности, получим следующий принцип эквивалентности ответственности сторон: математическое ожидание современной цены риска клиента равно математическому ожиданию современной цены риска компании.

При расчете рисков компании и клиентов одной из основных величин будет являться вероятность страхового случая  $p$ . Её определением занимается статистика. Если каждый год эмпирическое значения величины  $p$  практически одинаковы, то есть колебания случайны, невелики и не имеют какого-то тренда, то можно с большой степенью надежности утверждать, что истинное значение  $p$ , то есть реальное отношение числа страховых случаев к числу договоров, будет находиться в узком доверительном интервале. Таким образом определяются две составляющие страхового взноса:

1. Рисксовая премия – минимально возможная сумма, обеспечивающая эквивалентность обязательств сторон.
2. Рисксовая надбавка – надбавка на безопасность, которая создается для выплат возмещений, незначительно превышающее среднее ожидаемое количество страховых случаев.

Ведение страховых договоров требует множество дополнительных расходов, таких как зарплата агентов и аренда офиса. Конечно, все эти расходы страховая компания может покрыть только с помощью единственного источника получения прибыли - взносов клиентов. Отсюда появляется третья, неактуарная составляющая страхового взноса.

3. Нагрузка, предназначенная для покрытия расходов на ведение дела, проведение мероприятий, снижающих риск разорения, получение прибыли.

Рисксовая премия + рисксовая надбавка = нетто премия.

Таким образом, страховой взнос, или брутто-премия состоит из актуарной составляющей – нетто-премии, включающей в себя рисксовую премию

и рисковую надбавку, и неактуарной составляющей – нагрузки. В конце раздела получена формула для расчета взноса клиента.

Во втором разделе рассматриваются три основных средства повышения надежности страховой компании: объединение портфелей, создание резерва и перестрахования. Основное внимание в этом разделе уделяется именно первым двум способам.

Вводится понятие коэффициента риска, рассматривается его изменение при объединении двух пакетов договоров, а также рассматривается зависимость вероятности разорения компании от величины резерва страховой компании.

Третий раздел посвящен выбору оптимальной стратегии компании при перестраховании. Рассматриваются два основных вида договоров: кватный и эксцендентный. Сравнивая их, мы приходим к выводу, что эксцендентный договор является более рискованным для перестраховщика, поэтому цеденту приходится отдать на перестрахование не только особо опасные риски, но и выгодные для компании.

В этом разделе рассматривается также выбор оптимальной границы удержания риска. Для эксцендентного договора сначала рассматривается простейший случай с двумя возможными рисками, от которого мы переходим к более общему случаю и, обобщая рассуждения, получаем формулу для общего случая. что и являлось целью данной работы. Программный код для её расчета находится в приложении.

Приведём основные рассуждения для нахождения оптимальной границы удержания риска, в случае эксцендентных договоров:

Пусть страхования компания имеет пакет  $n$  договоров, по которым может наступить либо частичный ущерб  $x_1$  с вероятностью  $p_1$ ,  $x_2$  с вероятностью  $p_2$  и т.д., либо полный ущерб  $x_k$  с вероятностью  $p_k$ . И ОРН, установленная компанией,  $\delta_1$ . Тогда суммарная нетто премия, собранная этой компанией

$$\overline{\text{НП}} = n(x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_kp_k)(1 + \delta_1).$$

Имеем, что  $x_i < t < x_{i+1}$ , где  $t$  - граница удержания риска.

Ожидаемый суммарный иск основного страховщика  $Y$

$$M(Y) = n(x_1p_1 + \dots + x_ip_i + t(p_{i+1} + \dots + p_k)) \text{ и}$$

$$D(Y) = n(x_1^2 p_1 + \dots + x_i^2 p_i + t^2(p_{i+1} + \dots + p_k) - (x_1 p_1 + \dots + x_i p_i + t(p_{i+1} + \dots + p_k)))^2.$$

Ожидаемый суммарный иск перестраховщика  $Z$ , для которого

$$M(Z) = n \sum_{l=i+1}^k (x_l - t)p_l,$$

Если перестраховщик установил для себя ОРН =  $\delta^*$  и нагрузку  $R$ , то взнос уплаченный cedentом за перестрахование составит

$$\overline{\text{БП}}^* = M(Z) \cdot (1 + \delta^*)(1 + 0,01R) = M(Z) \cdot (1 + \delta_2), \quad \text{где } \delta_2 \approx \text{ОРН}.$$

Основной страховщик получит доход

$$H(t) = \overline{\text{НП}} - \overline{\text{БП}}^* = M(Y) + n[(x_1 p_1 + \dots + x_k p_k)\delta_1 - (\sum_{l=i+1}^k (x_l - t)p_l)\delta_2]$$

(Для страховщика берём  $\overline{\text{НП}}$ , а не  $\overline{\text{БП}}$ , так как нагрузу он потратит на ведение дела.)

Вероятность разорения страховщика  $\epsilon$  - это вероятность того, что полученный доход окажется меньше суммарного иска, то есть

$$\epsilon = P(H < Y) = 1 - P(Y \leq H) \rightarrow \text{если применима нормальная аппроксимация} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{H - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right).$$

Так как  $\Phi$  возрастающая функция, то для того, чтобы уменьшить  $\epsilon$ , необходимо увеличить её аргумент

$$\begin{aligned} \frac{H - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} &= \\ \frac{\sqrt{n}[(x_1 p_1 + \dots + x_k p_k)\delta_1 - (\sum_{l=i+1}^k (x_l - t)p_l)\delta_2]}{\sqrt{x_1^2 p_1 + \dots + x_i^2 p_i + t^2(p_{i+1} + \dots + p_k) - (x_1 p_1 + \dots + x_i p_i + t(p_{i+1} + \dots + p_k))^2}} &= \\ = \sqrt{n}h(t), \end{aligned}$$

$$h(t) = \frac{at + b}{\sqrt{ct^2 - dt + e}}; \quad a = (p_{i+1} + \dots + p_k)\delta_2;$$

$$b = (x_1p_1 + \dots + x_ip_i)\delta_1 + (x_{i+1}p_{i+1} + \dots + x_kp_k)(\delta_1 - \delta_2);$$

$$c = (p_{i+1} + \dots + p_k)(1 - (p_{i+1} + \dots + p_k)); \quad d = 2(x_1p_1 + \dots + x_ip_i)(p_{i+1} + \dots + p_k);$$

$$e = x_1^2p_1 + \dots + x_i^2p_i - (x_1p_1 + \dots + x_ip_i)^2.$$

$$t_{max} \approx \frac{ae}{bc}.$$

В итоге имеем

$$t_{max} = \frac{\left( \sum_{s=1}^i x_s^2 p_s (1 - p_s) - 2 \sum_{s=1}^i (x_s p_s \cdot \sum_{l=s+1}^i x_l p_l) \right) \delta_2}{\left[ \sum_{s=1}^i x_s p_s \delta_1 + \sum_{l=i+1}^k x_l p_l (\delta_1 - \delta_2) \right] \left( 1 - \sum_{l=i+1}^k p_l \right)}.$$



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была поставлена задача найти оптимальную величину удержания в эксцендентном договоре, при которой достигается наибольшая надёжность. При пакете из  $n$  договоров, по которым может наступить либо частичный ущерб  $x_1$  с вероятностью  $p_1$ ,  $x_2$  с вероятностью  $p_2$  и т.д., либо полный ущерб  $x_k$  с вероятностью  $p_k$ . Если компания решает заключить с перестраховщиком договор о перестраховании исков превышающих  $t$ , где  $x_i < t < x_{i+1}$ , то максимальная надёжности достигается при

$$t_{max} = \frac{\left( \sum_{s=1}^i x_s^2 p_s (1 - p_s) - 2 \sum_{s=1}^i (x_s p_s \cdot \sum_{l=s+1}^i x_l p_l) \right) \delta_2}{\left[ \sum_{s=1}^i x_s p_s \delta_1 + \sum_{l=i+1}^k x_l p_l (\delta_1 - \delta_2) \right] \left( 1 - \sum_{l=i+1}^k p_l \right)},$$

где  $\delta_1$  - ОРН компании, а  $\delta_2$  - ОРН перестраховщика.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Гудошникова, Е.В. Актуарные основы страхования имущества / Е.В. Гудошникова. СПб.: Питер, 2016. 1168 С.
- 2 Корнилов, И.А. Основы страховой математики / И.А. Корнилов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. 400 С.
- 3 Корнилов, И.А. Элементы страховой математики. Учебное пособие / И.А. Корнилов. М.: МЭСИ, 2003. 337 С.
- 4 Хэмптон, Д.Д. Финансовое управление в страховых компаниях / Д.Д. Хэмптон. М.: Анкил, 1995. 263 С.
- 5 Шихов, А.К. Страхование: Учеб. Пособие для вузов / А.К. Шихов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. 431 С.
- 6 Штрауб, Э. Актуарная математика имущественного страхования / Э. Штрауб. М.: Крокус-Т, 1993. 150 С.
- 7 Большев, Л.Н., Смирнов, Н.В. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. М.: Наука, 1983. 416 С.
- 8 Кутуков, В.Б. Основы финансовой и страховой математики / В.Б. Кутуков. М.: Дело, 1998. 301 С.
- 9 Сухов, В.А. Страховой рынок России / В.А. Сухов. М.: Анкил, 1992. 103 С.
- 10 Севастьянов, Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики / Б.А. Севастьянов. М.: Наука, 1982. 256 С.