Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и
стохастического анализа

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Иночкина Александра Юрьевича

Научный руководитель
д. ф.-м. н. ______________ С. П. Сидоров

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н. ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы обусловлена высокой востребованностью решения управленческих задач в областях экономики и менеджмента с помощью динамического программирования. Проводятся многочисленные исследованиях этих вопросов среди отечественных и зарубежных математиков и экономистов.

Динамическое программирование - термин, который впервые использовал американский математик Ричард Эрнест Беллман в 1940-х годах, чтобы описать нахождение решения задачи, в которой можно получить ответ одной задачи только тогда, когда была решена «предшествующая» ей. Но уже в 1953 году Р. Беллман уточнил это определение до современного. Основной его работой является уравнение Беллмана. Оно применялось к теории управления, междисциплинарной области инженерии и математики, а так же к другим темам в области прикладной математики. Уравнение Беллмана так же стало очень важным инструментом для экономической теории.

Смысл динамического программирования достаточно прост. Для решения имеющейся задачи необходимо разбить её на подзадачи и объединить их решение в одно общее. Но можно столкнуться с тем, что подзадачи бывают одинаковыми. Цель подхода динамического программирования и заключается в том, чтобы каждая подзадача была решена один раз, что, в свою очередь, уменьшает количество вычислений.

Разработан ряд методов и моделей, предназначенных для предприятий различного характера. Это говорит о том, что этот метод является востребованным и необходимым для решениях многих управленческих задач в настоящее время.

Динамическое программирование - это совокупность методов, с помощью которых осуществляют поиск оптимальных решений. Основой этих решений является вычисление их последствий и разработка оптимальной стратегии для последующих решений.

Целью данной работы является:

— изучение теоретических основ динамического программирования для детерминированного случая;
— Применение его численных методов для решения экономических задач;
— реализация одного из методов в виде алгоритма решения задачи опти-

мального роста с помощью программной среды Scilab.

Основное содержание работы

В первом разделе данной работы вводится общее понятие динамического программирования, рассматривается эвристический вывод уравнения Беллмана и доказываются теоремы, связанные с этим уравнением: принцип сжимающих отображений и достаточные условия Блэквелла.

Во втором разделе рассматривается неоклассическая модель роста, которая разбивается на задачи с конечным и бесконечным горизонтом. Для них приводится уравнение Беллмана и его решение. Также рассматривается применение к задаче оптимального роста достаточного условия Блэквелла.

В третьем разделе описываются численные методы детерминированного программирования, основанные на принципе сжимающих отображений, для решения уравнения Беллмана. К ним относятся итерация по критерию и применение к ней интерполяции, итерация по стратегиям с использованием метода Говарда.

В четвёртом в качестве примера задачи динамического программирования берётся задача оптимального роста с дискретным временем и непрерывным состоянием. Для неё рассматривается численный метод решения, который реализуется с помощью языка программирования Scilab для двух различных способов приближения: многочленами Чебышева и многочленами Бернштейна. И в результате делается вывод о работе алгоритмов с применением этих двух подходов.

Динамическое программирование - это некий математический аппарат, идея которого заключается в разложении поставленной задачи на более простые. А отличительной особенностью является то, что весь процесс решения разбивается на этапы, что, в свою очередь, и определило появление термина динамическое программирование. Также методы динамического программирования можно применять к решению задач, где не рассматривается фактор времени.

Таким образом, этот математический аппарат можно рассматривать как пошаговое или поэтапное программирование.

Основой решения задач методами динамического программирования является принцип оптимальности, сформулированный Р.Э. Беллманом. В нём говорится следующее: оптимальное поведение обладает тем свойством, что каким бы ни было первоначальное состояние системы и первоначальное решение, последующее решение должно определять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате первоначального решения.

Из чего можно сделать вывод, что планирование каждого шага должно учитывать общую выгоду, получаемую по завершении всего процесса, что и позволяет оптимизировать конечный результат по выбранному критерию.

Динамическое программирование относится к одному из разделов оптимального программирования, для которого характерны методы, используемые в операциях, в которых процесс принятия решения разбит на этапы. С помощью этих методов решаются такие задачи, как вариантные оптимизационные задачи с заданными критериями оптимальности, с определёнными связями между переменными и целевой функцией, выраженными системой уравнений или неравенств. При этом ограничения могут быть даны в виде равенств или неравенств.

Динамическое программирование можно применять для решения разного рода задач, как для задача связанных с динамикой процесса или системы, так и для статических задач, например, с распределением ресурсов. Это значительно расширяет область применения динамического программирования для решения управления. В свою очередь, возможность упрощения процесса решения, которая достигается за счёт ограничения области и количества, исследуемых при переходе к очередному этапу вариантов, увеличивает достоинства этого комплекса методов.

У динамического программирования есть своего рода недостаток - отсутствие единого универсального метода решения. А значит, что каждая задача имеет свои как-либо особенности решения, что в свою очередь приводит к необходимости найти такую совокупность методов, которая была бы приемлема для решения определённой задачи.

Если рассматривать процесс с непрерывным временем, то динамическое программирование представляет собой предельный вариант дискретной схемы решения.

Таким образом, в широком смысле динамическое программирование можно определить как оптимальное управление процессом, посредством изменения управляемых параметров на каждом шаге [1].

Уравнение Беллмана

Уравнение Беллмана - основа динамического программирования [2].

Введём такое понятие как экономический агент. Под ним будем подразумевать субъекта экономических отношений, который участвует в производстве, распределении, обмене и потреблении экономических благ.

Рассмотрим случай, когда агент должен принять решение о выборе набора управляющих переменных $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$, для того, чтобы максимизировать дисконтированную сумму будущих выплат $u\left(y_t, x_t\right)$, где x_t - переменная состояния, предполагающая развитие следующим образом при заданном значении x_0:

$$x_{t+1} = h(x_t, y_t).$$

Оптимальное значение этот агент может извлечь из описанного процесса максимизации, который определяет функцию ценности следующего вида:

$$V(x_t) = \max_{\{y_{t+s} \in D(x_{t+s})\}_{s=0}^{\infty}} \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(y_{t+s}, x_{t+s}),$$

где $D(x_{t+s})$ - допустимое множество всех управлений в состоянии x_{t+s}. Можно заметить, что функция ценности является функцией переменной состояния.

$$V(x_t) = \max_{y_t \in D(x_t)} u(y_t, x_t) + \beta V(x_{t+1}). \tag{1}$$

Уравнение Беллмана даёт возможность найти множество оптимальных стратегий для y и x в каждый момент времени t, которое определяется как:

$$\{y_t, x_{t+1}\} \in \arg\max_{y \in D(x)} \left[u(y, x) + \beta V(x_{t+1})\right].$$

Следовательно, цель состоит в том, чтобы решить (1) для функции ценности $V(x_t)$. Это можно сделать с помощью простой процедуры, которая будет заключаться в следующем:

1. Сделать начальное предположение о функции ценности $V_0(x_t)$.

2. Определить $V_{i+1}(x_t)$, используя уравнение Беллмана:

$$V_{i+1}(x_t) = \max_{y_t \in D(x_t)} u(y_t, x_t) + \beta V_i(h(x_t, y_t)).$$

3. Если $V_{i+1}(x_t) = V_i(x_t)$, то будет найдена неподвижная точка, и задача будет решена. Иначе следует вернуться к пункту 2 и повторять процесс до равенства в точке.

Иными словами, решение уарвнения Беллмана состоит в нахождении неподвижной точки или во введении такого оператора T, который находил бы эту неподвижную точку следующим образом:

$$V_{i+1} = TV_i$$

где T выступает перечнем операций, участвующих в расчёте уравнения Беллмана. Теперь задача состоит в том, чтобы доказать существование и единственность уравнения (1). [2]

В следующем пункте приводится ряд необходимых определений и теорем, с доказательством существования и единственности решения уравнения Беллмана, а именно:

Теорема 7. (Принцип сжимающих отображений). Если пара (S, ρ) является полным метрическим пространством и $T : S \to S$ является сжимающим отображением с модулем $\beta \in (0, 1)$, то:

1. T имеет ровно одну неподвижную точку $V \in S$, такую, что $V = TV$.
2. Для любого $V \in S : \rho(T^n V_0, V) < \beta^n \rho(V_0, V), n = 0, 1, 2, ...$

Теорема 8. (Достаточные условия Блэквелла). Пусть X - метрическое пространство и $B(X)$ - пространство ограниченных, непрерывных функций $V : X \to R$. А $T : B(X) \to B(X)$ является оператором, удовлетворяющим следующим условиям:

1. (Монотонность) Если $V, W \in B(X)$ и $V(x) \leq W(x)$ для всех $x \in X$, то $TV(x) \leq TW(x)$ для всех $x \in X$.
2. (Дисконтирование) Существует некоторая константа $\beta \in (0, 1)$, такая, что для всех $V \in B(X), a \geq 0$ и любых $x \in X$:

$$T(V + a) \leq TV + \beta a$$

Тогда оператор T является сжимающим отображением с модулем β.

Определение 1. Метрическим пространством называется пара (S, ρ), где S - некоторое множество, а $\rho : S \times S \to R^+$ - функция расстояния, удовлетворяющая следующим аксиомам расстояния для любых $x, y, z \in S$:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, причём $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (неотрицательность);
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x)$ (неравенство треугольника).

Функция расстояния p называется метрикой множества S. Как часто бывает на практике, что выбранная метрика предсталвяет собой следующее выражение: $\rho(x, y) = \rho(x - y, \theta)$, где θ - это нулевой элемент множества S. Под нулевым элементом понимается $\theta \in S$, такая, что $x + \theta = x$ и $0x = \theta$, если 0 - скалярный ноль.

Определение 2. Нормированным векторным пространством [3] называется множество S с заданной на нём нормой, обозначаемой как $\|\cdot\| : S \to R$, такой, что:

1. $\|x\| \geq 0$ для всех $x \in S$;
2. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ для всех $x \in S, \alpha \in R$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in S$.

Пусть $x_0, x_1, x_2, ...$ -последовательность точек в метрическом пространстве (S, ρ).

Определение 3. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к точке $x \in S$, если :

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x) = 0,$$

то есть если для всякого $\epsilon > 0$ существует такое число $N = N_\epsilon$, что для всех $n \geq N$ имеет место $\rho(x_n, x) < \epsilon$.

Определение 4. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется фундаментальной или последовательнстью Коши, если:

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x_m) = 0,$$

то есть для всякого $\epsilon > 0$ существует такое число $N = N_\epsilon$, что для всех $n, m \geq N$ имеет место $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$.

Определение 5. Метрическое пространство (S, ρ) называется полным, если каждая последовательность Коши имеет предел [4].

Определение 6. Пусть (S, ρ) - метрическое пространство и $T : S \to S$- функция, отображающая S в само себя. Тогда T называют сжимающим отображением или функцией сжатия, если существует такое число $\beta \in (0, 1)$, что для любых точек $x, y \in S$ выполняется неравенство:

$$\rho(Tx, Ty) \leq \beta\rho(x, y) \tag{2}$$

Всякое сжимающее отображение непрерывно. Так как $x_n \to x$, то есть $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$, то, учитывая неравенство (2), получаем $Tx_n \to Tx$. [3],[4]

Из определения 6 вытекает, что применение сжимающего отображения к двум элементам из множества S приводит к их сближению.

Теорема 7 весьма значима, так как она устанавливает, что любой оператор, который обладает свойством сжатия, будет показывать единственную неподвижную точку.

А важность теоремы 8 заключается в том, что она даёт простые инструменты для проверки, является ли рассмотренная задача задачей сжатия, что в свою очередь позволяет убедиться, является ли алгоритм, определённый раннее, подходящим для имеющейся задачи.

Во втором разделе рассматривается неоклассическая модель роста, задачи с конечным и бесконечным горизонтом, способы их решения и **применение достаточного условия Блэквелла**.

В третьем разделе рассматриваются алгоритмы решения уравнения Беллмана, а именно:

— Итерация по критерию [5],

— Использование метода интерполяции [5],

— Итерация по стратегиям. Метод Говарда [5].

В работе рассматривается следующий алгоритм решения уравнения Беллмана с помощью итераций по критерию.

1. Выбрать X - некоторую сетку допустимых значений для переменной состояний x:

$$X = \{x_1, ..., x_N\}$$

Сформулировать начальное предположение для функции ценности $V_0(x)$

и выбрать критерий окончания итерационного процесса $\epsilon > 0$.

2. Для каждого значения $x_l \in X, l = 1, ..., N$ найти:

$$V_{i+1}(x_l) = \max_{x' \in X} u(y(x_l, x'), x_l) + \beta V_i(x')$$

3. Если $||V_{i+1}(x) - V_i(x)|| < \epsilon$, то перейти к следующему шагу, иначе вернуться к шагу 2.

4. Вычислить окончательное решение как:

$$y^*(x) = y(x, x')$$

и

$$V^*(x) = \frac{u(y^*(x, x))}{1 - \beta}.$$

В четвёртом разделе рассматривается применение динамического программирования для решения задачи оптимального роста [6].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, динамическое программирование - это математический метод, с помощью которого осуществляется поиск оптимального решения для управления многошаговыми процессами. Под этими процессами подразумеваются такие, при которых происходит последовательный переход объекта или системы из одного состояния в другое, причём эти состояния изменяются во времени или поэтапно.

В ходе данной работы было рассмотрено динамическое программирование, в основе которого лежит уравнение Беллмана. Был предложен численный метод для детерминированного случая, основанный на принципе сжимающих отображений, который можно применить для решения задачи оптимального роста.

Были реализованы алгоритмы решения этой задачи, с помощью программной среды Scilab. В самих алгоритмах была использована аппроксимация двух вариаций: первая - приближение с помощью линейной комбинации многочленов Чебышева, вторая - приближение с помощью многочленов Бернштейна.

В результате было выяснено, что при использовании многочленов Бернштейна достигается более стабильная работа по сравнению с методом приближения на основе линейной комбинации многочлена Чебышева. Но стоит заметить, что ошибка приближения полиномами Бернштейна является высокой [4], [7], [8], [2], [6], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [5], [15], [15], [4], [3], [16], [17], [18], [19], [20], [21]..

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 *Фомин, .* Математические методы и модели в коммерческой деятельности / . Фомин. — Москва: Научная книга, 2005. — С. 616.

2 *Беллман, .* Динамическое программирование / . Беллман. — Москва: Изд-во иностранной литературы, 1976. — С. 400.

3 *Кутузов, .* Метрическое пространство / . Кутузов. — Троицкого филиала Челябинского государственного университета, 2012.

4 *Колмогоров, .* Элементы теории функций и функционального анализа / . Колмогоров, . Фомин. — Москва: Наука, 1976.

5 *Heer, B.* Value Function Iteration as a Solution Method for Ramsey Model / B. Heer, A. Maubner. — Москва: Наука, 2008.

6 *Беллман, .* Прикладные задачи динамического программирования / . Беллман, . Дрейфус. — Москва: Наука, 1965.

7 *Алексеев, .* Scilab: Решение инженерных и математических задач / . Алексеев, . Чеснокова, . Рудченко. — ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — С. 260.

8 *Арис, .* Дискретное динамическое программирование: Введение в оптимизацию многошаговых процессов / . Арис. — Москва: Издательство «Мир»: Редакция литературы по математическим наукам, 1969. — С. 173.

9 *Беллман, .* Некоторые вопросы математической теории процессов управления / . Беллман, . Гликсберг, . Гросс. — Москва: Издательство иностранной литературы: Редакция литературы по математическим наукам, 1958. — С. 313.

10 *Бахволов, .* Численные методы / . Бахволов, . Жидков, . Кобльков. — Бином. Лаборатория знаний, 2003. — С. 632.

11 *Бойцов, .* Алгоритмы формосохраняющего динамического программирования для решения задачи оптмального роста//Математическое моделирование в экономике и управлении риска: материалы III Междунар. Молодежной науч.-практи.конф. / . Бойцов, . Сидоров. — Саратов, 2014. — С. 44–49.

12 *Cai, Y.* Shape-preserving dynamic programming / Y. Cai, K. Judd. — Math.Meth.Oper.Res, 2013. — С. 407–421.

13 *Фомин, .* Математические методы и модели в коммерческой деятельности / . Фомин. — Москва: Финансы и статистика, 2005. — С. 616.

14 *Гельфонд, .* Исчисление конечных разностей / . Гельфонд. — Москва: ГИФМЛ, 1959. — С. 400.

15 *Judd, K.* Numerical methods in economics / K. Judd. — Cambridge, Massacgussets: MIT Press, 1998.

16 *Lucas, R.* Recursive Methods in Economic Dynamics / R. Lucas, N. Stokey, E. Prescott. — 1989.

17 *Морозов, .* Подготовка документов в издательской системе Латех / . Морозов, . Пархоменко. — Ярославль: ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2011. — С. 96.

18 *Solow, R.* Technical Cnahge and the Aggregate Production Function / R. Solow. — Москва: The MIT PRess, 1957. — С. 312–320.

19 *Сюдсетер, .* Справочник по математике для экономистов / . Сюдсетер, . Стрём, . П. — СПб: Экономическая школа, 2000. — С. 229.

20 *Tauchen, G.* Quadrature Based Methods for Obtainin Approximate Solution to Nonlinear Asset Pricin Models / G. Tauchen, R. Hussey. — Москва: Наука, 1991. — С. 371–396.

21 *Туманова, .* Макроэкономика. Элементы продвинутого подхода / . Туманова, . Шагас. — Москва: ИНФРА-М, 2004. — С. 400.