Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций
и стохастического анализа

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Столбовой Екатерины Павловны

Научный руководитель
ст. преп. ________________ Н.В.Сергеева

Зав. кафедрой
д.ф-м.н, профессор ________________ С.П. Сидоров

Саратов, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В повседневной жизни мы постоянно встречаемся с различными формами обслуживания и обслуживающими системами. Примерами таких систем могут служить телефонные станции, ремонтные мастерские, магазины, парикмахерские, аэропорты и т.д. Каждая такая система состоит из какого-то числа обслуживающих приборов, в качестве которых могут фигурировать различные приборы, аппараты, линии связи, люди и т. п. Работа любой системы массового обслуживания состоит в удовлетворении поступающего в нее потока заявок. Заявки поступают в систему одна за одной в случайные моменты времени, время обслуживания каждой заявки так же случайно.

Данная работа представляет интерес поскольку имитационное моделирование является мощным инструментом исследования поведения реальных систем. Построенные имитацонные модели систем массового обслуживания в дальнейшем могут применяться для расчета экономических характеристик эффективности функционирования реальных систем обслуживания. Методы имитационного моделирования позволяют собрать необходимую информацию о поведении системы путем создания ее компьютеризованной модели. Эта информация используется затем для проектирования системы.

Целью бакалаврской работы является моделирование и анализ систем массового обслуживания с ожиданием с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальной длительностью их обслуживания.

Объект исследования — система массового обслуживания с ожиданием с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальной длительностью их обслуживания.

Предмет исследования — обслуживание заявок, поступающих в систему массового обслуживания с ожиданием.

Для достижения поставленных целей в работе необходимо решить следующие **задачи**:

— определить основные понятия, необходимые для описания марковских цепей;

— изучить частные случаи цепей Маркова: процесс размножения и гибели, однородные марковские цепи;

— определить основные понятия, связанные с системами массового обслуживания;

— рассмотреть частный случай систем массового обслуживания — системы обслуживания без потерь;

— описать структуру имитационного моделирования систем массового обслуживания;

— рассмотреть основные алгоритмы функционирования имитационных моделей систем массового обслуживания;

— построить модель системы массового обслуживания с ожиданием с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальной длительностью их обслуживания;

— рассчитать основные практические и теоретические характеристики данной системы;

— провести сравнительный анализ практических и теоретических характеристик.

Практическая значимость проводимого исследования состоит в том, на основании построенной компьютеризированной модели системы массового обслуживания с ожиданием с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальной длительностью их обслуживания можно проводить исследования реальных обслуживающих систем, рассчитывать экономические характеристики эффективности функционирования этих систем. По результатам этих вычислений делать выводы о состоятельности и эффективности предприятий.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 20 наименований, и трех приложений. Общий объем работы составляет 58 страниц, включая 3 таблицы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В **первом** разделе приводятся основные понятия теории цепей Маркова.

Во **втором** разделе рассмотрены основные понятия теории массового обслуживания. Система массового обслуживания (СМО) производит обслуживание требований, поступающих в нее из источника требований и возвращающихся после обслуживания в источник. Обслуживание требований в системе производится обслуживающими приборами. Система может содержать от одного до бесконечного числа приборов. Система массового обслуживания, содержащая один прибор, называется *однолинейной*, система, содержащая не менее двух приборов, - *многолинейной*.

В зависимости от реализации в системе возможности ожидания поступившими требованиями их обслуживания системы массового обслуживания делятся на три типа: 1) системы с потерями, в которых требования, не нашедшие в момент поступления ни одного свободного прибора, теряются (возвращаются в источник без обслуживания); 2) системы с ожиданием, в которых возможно ожидание любого числа требований, при этом ожидающие требования образуют очередь, длина которой не ограничена; 3) системы с ожиданием и ограничениями, в которых допускается возможность образования очереди ограниченной длины; при этом требования, поступившие в систему, когда отсутствуют свободные места для ожидания в очереди, теряются (возвращаются в источник без обслуживания). В системах с ожиданием очередь в общем случае может иметь сложную структуру, являясь некоторым набором очередей. Выбор очередного требования из очереди на обслуживание производится с помощью некоторой дисциплины обслуживания. Дисциплина обслуживания заключается в правиле постановки заявок в очередь и порядке их выбора из очереди на обслуживание, распределении приборов между заявками.

Случайная последовательность требований, которые поступают в систему обслуживания и которые необходимо обслужить, называется *потоком* требований. Поток требований определяется моментами поступлений τ_i и числом требований γ_i, поступающих в момент τ_i . При этом γ_i и τ_i в общем случае случайны.

Особенно важен частный случай, когда все длительности промежутков времени $\xi_i = \tau_{i+1} - \tau_i$ между последовательными требованиями имеют одинаковое экспоненциальное распределение с параметром λ. Такой поток называется *пуассоновским* (или простейшим потоком) с интенсивностью λ, так как случайное число требований, поступающих в промежутке времени длительности t, подчинено пуассоновскому распределению с параметром λt.

Пуассоновские потоки на практике встречаются очень часто, так как к их образованию приводит суммирование случайных потоков с большими интервалами времени между поступлением требований. Пуассоновский поток выделяется особо не только из-за его простоты, но и потому, что при суммировании пуассоновских потоков результирующий поток также будет пуассоновским.

Параметры и характеристики систем обслуживания. Системы обслуживания характеризуются пятью величинами:

$$A/S/\kappa/B/Z.$$

Буква A характеризует поток требований. В работе рассмотрены только $A = M$ (Markov) – пуассоновский поток требований. Буква S характеризует случайные последовательности длительностей обслуживания на отдельных приборах обслуживания. Будем рассматривать только $S = M$ – последовательность независимых, одинаково распределенных экспоненциально длительностей обслуживания на каждом приборе обслуживания. Буква κ обозначает число обслуживающих приборов в СМО. Буква B - число мест для ожидания в очереди (маскимальная длина очереди). Значение $B = 0$ характеризует систему с потерями, значение $0 < B < \infty$ - комбинированную систему с ожиданием и потерями, а $B = \infty$ - чистую систему с ожиданием, то есть бесконечным числом мест для ожидания. Буква Z указывает число источников требований. При рассмотрении конкретной системы обслуживания всегда предполагается, что потоки требований стохастически независимы от последовательности интервалов обслуживания.

В системах массового обслуживания используются следующие обозначения: λ - интенсивность входящего потока требований; μ - интенсивность обслуживания требований одним прибором; $\psi = \dfrac{\lambda}{\kappa\mu}$ - коэффициент использования обслуживающих приборов системы; n - число требований в СМО; $\overline{n}$ - математическое ожидание (м. о.) числа требований в СМО; p_n - стационарная вероятность пребывания в СМО точно n требований.

Основными числовыми характеристиками для стационарного режима СМО, где V - общее число требований в источниках до начала работы СМО; V может быть конечным или бесконечным, являются:

$\overline{n} = \sum\limits_{n=0}^{V} np_n$ - м.о. числа требований в СМО;

$\overline{b} = \sum\limits_{n=k+1}^{V} (n-\kappa)p_n$- м.о. числа требований в очереди;

$\overline{g} = \sum\limits_{n=0}^{\kappa} (\kappa-n)p_n$ -м.о. числа свободных приборов в СМО;

$\overline{h} = \sum\limits_{n=0}^{\kappa} np_n + \kappa \sum\limits_{n=\kappa+1}^{V} p_n$ - м.о. числа занятых приборов в СМО.

Также имеют место соотношения:

$$\overline{h} + \overline{g} = \kappa, \qquad \overline{h} + \overline{b} = \overline{n}, \qquad \frac{1}{\mu} + \overline{w} = \overline{u}.$$

Известен *закон сохранения среднего потока требований*, согласно которому в *стационарном режиме СМО интенсивность выходящего потока равна интенсивности входящего потока.*

Большое значение для исследования открытых систем, когда входящие требования независимы от выходящих, имеет формула Литтла: $\overline{n} = \lambda\overline{u}$ или $\overline{b} = \lambda\overline{w}$.

Система $M/M/\kappa$ с ожиданием. Рассматривается система с неограниченной общей очередью и постоянной интенсивностью входящего потока требований, обслуживаемых согласно дисциплине "первый пришел - первый обслужен"(дисциплина *FCFS*). В системе имеется κ одинаковых обслуживающих приборов, работающих параллельно. Эволюцию системы можно описать процессом размножения и гибели с интенсивностями переходов

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \mu_n = min\{n\mu, \kappa\mu\} = \begin{cases} n\mu, & 0 \le n \le \kappa, \\ \kappa\mu, & n \ge \kappa. \end{cases}$$

Вероятность того, что в системе находится n требований имеет вид

$$p_n = \begin{cases} p_0 \dfrac{(\kappa\psi)^n}{n!}, & n \le \kappa \\ p_0 \dfrac{\psi^n \kappa^\kappa}{\kappa!}, & n \ge \kappa. \end{cases} \tag{1}$$

Вероятность того, что система свободна имеет вид

$$p_0 = \frac{1}{\frac{(\kappa\psi)^\kappa}{\kappa!(1-\psi)} + \sum\limits_{n=0}^{\kappa-1} \frac{(\kappa\psi)^n}{n!}}. \qquad (2)$$

Известно, что среднее полное время занятости одного прибора в течение интервала T равно ψT, а среднее время простоя равно $(1-\psi)T$. Следовательно, среднее число занятых и свободных приборов будет соответственно равно: $\overline{h} = \psi\kappa$ и $\overline{g} = (1-\psi)\kappa$.

Среднее число требований, ожидающих в очереди,

$$\overline{b} = \sum_{n=\kappa+1}^{\infty} (n-\kappa)p_n = p_0 \frac{\kappa^\kappa \psi^{\kappa+1}}{\kappa!(1-\psi)^2}.$$

Среднее число требований в системе

$$\overline{n} = \overline{b} + \overline{h} = p_0 \frac{\kappa^\kappa \psi^{\kappa+1}}{\kappa!(1-\psi)^2} + \psi\kappa.$$

Используя формулы Литтла, получим среднее время пребывания требований в системе

$$\overline{u} = \frac{\overline{n}}{\lambda} = \frac{1}{\mu}\left[p_0 \frac{\kappa^{\kappa-1}\psi^\kappa}{\kappa!(1-\psi)^2} + 1\right], \qquad \overline{w} = \frac{\overline{b}}{\lambda} = \frac{p_0}{\mu}\frac{\kappa^{\kappa-1}\psi^\kappa}{\kappa!(1-\psi)^2}.$$

Третий раздел посвящен принципам построения имитационных моделей систем массового обслуживания. Имитационное моделирование есть процесс конструирования модели реальной системы и постановки экспериментов на этой модели с целью либо понять поведение системы, либо оценить (в рамках ограничений, накладываемых некоторым критерием или совокупностью критериев) различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной системы. Таким образом, процесс имитационного моделирования это процесс, включающий и конструирование модели, и аналитическое применение модели для изучения некоторой проблемы.

Система $\hat{S}$ состоит из объектов: источник требований, очередь требований системы обслуживания, прибор системы обслуживания, требование. Объектам системы $\hat{S}$ ставятся в соответствие объекты имитационной модели.

Требования. В общем случае требования представляют собой перемещаемые по системе объекты, различающиеся классом, приоритетом, номером и другими параметрами. Из всего набора параметров требования реальной системы в модели необходимо отобразить только те, которые способствуют достижению цели моделирования. Необходимы следующие атрибуты требования модели: момент поступления требования t_n в очередь системы из источника, момент начала обслуживания требования t_{nac}, момент завершения обслуживания требования t_{zav}.

Разность моментов t_{zav} и t_{nac} определяет длительность пребывания требования в системе обслуживания, а разность моментов t_{nac} и t_n - длительность ожидания требования в очереди системы обслуживания. Для получения статистически значимых оценок характеристик $\overline{u}$ и $\overline{b}$ потребуется определенное число обслуженных требований. Их хранение в модели организуется следующим образом.

Прибор, завершив обслуживание требования, будет направлять его не в источник, а в специально организованную очередь обслуженных требований Q_{obsl}. Тогда признаком окончания эксперимента с имитационной моделью будет достижение заранее определенного числа обслуженных требований в очереди Q_{obsl}.

Очереди. Очереди являются самостоятельными объектами имитационных моделей систем обслуживания и служат для хранения требований, ожидающих обработки. Основным набором характеристик очереди являются: максимальное число требований в очереди, дисциплина установления требований в очередь и выбора их из очереди, приоритет требований, которым разрешается пребывать в очереди. В рассматриваемом случае имитационная модель системы $\hat{S}$ содержит очередь Q требований, ожидающих обслуживания, и очередь Q_{obsl} обслуженных требований.

Модельное время в имитационной модели представлено глобальной переменной вещественного типа, принимающей значения на интервале $[0, \infty)$ и обеспечивающей имитацию параллельного развития процессов системы $\hat{S}$.

Событие - мгновенное изменение состояния модели системы $\hat{S}$. В имитационной модели различаются события трех типов: поступление требования в систему массового обслуживания, начало обслуживания требования прибором системы обслуживания и уход требования из системы массового обслуживания после завершения обслуживания.

Процесс функционирования системы $\hat{S}$ в имитационной модели представляется в виде логически связанной последовательности событий на оси модельного времени. Эта последовательность характеризуется интервалами времени между событиями и типом событий.

В **четвертом** разделе построена математическая модель системы массового обслуживания типа $M/M/\kappa/FCFS$. В данную систему поступает поток требований, имеющий пуассоновское распределение с параметром λ, длительность обслуживания требований имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. В системе имеется κ параллельно работающих обслуживающих прибора. Каждый обслуживающий прибор может одновременно обслуживать только одно требование. Если в момент поступления очередной заявки в системе уже находится κ и более заявок, то эта заявка помещается в очередь и ждет начала обслуживания. Дисциплина обслуживания $FCFS$ — «первым пришел — первым обслужен». Вместимость системы не ограничена. Емкость источника бесконечна.

Требуется определить следующие параметры работы системы: ψ - коэффициент использования системы; $\overline{b}$ – среднее число требований в очереди; $\overline{w}$ - среднее время ожидания в очереди; $\overline{u}$ - среднее время пребывания требования в системе.

Для нахождения указанных характеристик на языке C++ была написана программа, моделирующая работу данной системы. Поведение системы изменяется лишь в заданные моменты времени – моменты поступления заявок в систему и моменты, когда обслуженная заявка покидает систему. Таким образом, двумя главными событиями в модели является прибытие и уход заявки. В другие моменты времени никаких изменений, влияющих на статистику системы, не происходит.

Входными данными программы являются: λ, μ, κ.

Выходными данными программы являются следующие: количество требований обслуженных на i-ом приборе; суммарное время обслуживания i-ым прибором; суммарное время нахождения заявок в очереди и вообще в системе; ψ_i - коэффициент использования i-го прибора; $\overline{b}$ - среднее число заявок в очереди; $\overline{w}$ - среднее время ожидания в очереди (в часах); $\overline{u}$ - среднее время пребывания заявки в системе (в часах); ψ - коэффициент использования системы в целом.

Коэффициент использования (загрузки) системы считается по формуле:

$$\psi = \frac{\text{суммарное время обслуживания}}{\text{время моделирования}}.$$

Среднее число требований в очереди считается по формуле:

$$\bar{b} = \frac{\text{суммарное время ожидания в очереди}}{\text{время моделирования}}.$$

Среднее время ожидания требования в очереди считается по формуле:

$$\overline{w} = \frac{\text{суммарное время ожидания в очереди}}{\text{количество требований}}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе:

$$\overline{u} = \frac{\text{суммарное время пребывания заявок в системе}}{\text{количество требований}}.$$

Для оценки полученных характеристик в программе были введены формулы, рассчитывающие те же параметры с использованием теоретических результатов раздела 2.

В **пятом** разделе проведен сравнительный анализ характеристик, полученных на основе дискретной модели, с аналогичными теоретическими характеристиками (табл. 1, 2). На основании результатов, представленных в таблице 1 видно, что эти характеристики отличаются между собой в среднем на 30 – 35 %, но если увеличить число требований до 4000, то теоретические и модельные характеристики отличаются друг от друга не более чем на 10 %. Это говорит о том, что в первом случае система не успевает достичь стационарного режима.

Таким образом, полученная модель полностью имитирует работу многоканальной системы массового обслуживания с ожиданием с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальной длительностью их обслуживания, и в дальнейшем может быть применена для расчета экономических характеристик эффективности функционирования реальных систем массового обслуживания.

Таблица 1. Расчет характеристик (600 требований)

Харак-ки	Расчет на основании дискретной модели		Расчет на основании теоретических результатов	
	$\kappa = 3$, $\lambda = 4$, $\mu = 2$	$\kappa = 4$, $\lambda = 4$, $\mu = 2$	$\kappa = 3$, $\lambda = 4$, $\mu = 2$	$\kappa = 4$, $\lambda = 4$, $\mu = 2$
ψ	0.6337	0.4767	0.6667	0.5
$\overline{b}$	0.5758	0.114	0.8889	0.1739
$\overline{w}$ (в часах)	0.1439	0.0285	0.2223	0.0435
$\overline{u}$ (в часах)	0.6304	0.5149	0.7223	0.5435

Таблица 2. Расчет характеристик (4000 требований)

Харак-ки	Расчет на основании дискретной модели		Расчет на основании теоретических результатов	
	$\kappa = 3$, $\lambda = 15$, $\mu = 6$	$\kappa = 4$, $\lambda = 15$, $\mu = 6$	$\kappa = 3$, $\lambda = 15$, $\mu = 6$	$\kappa = 4$, $\lambda = 15$, $\mu = 6$
ψ	0.824	0.62	0.833	0.625
$\overline{b}$	3.456	0.5143	3.511	0.533
$\overline{w}$ (в часах)	0.2307	0.034	0.234	0.035
$\overline{u}$ (в часах)	0.398	0.2013	0.4	0.202

В **заключении** приведены результаты бакалаврской работы.

Основные результаты

1. Определены основные понятия, необходимые для описания марковских цепей. Изучены частные случаи цепей Маркова: процесс размножения и гибели, однородные марковские цепи.

2. Определены основные понятия, связанные с системами массового обслуживания. Изучены системы обслуживания с ожиданием с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальной длительностью их обслуживания.

3. Изучены принципы и алгоритмы построения имитационной модели систем массового обслуживания.

4. Построена математическая модель изученной системы массового обслуживания. Разработана программа, моделирующая работу такой системы, и

позволяющая вычислять основные характеристики системы. Описание программы и программный код приводится в **приложениях А и Б** соответственно. Разработанная программа позволяет также вычислять основные характеристики системы массового обслуживания с ожиданием с пуассоновскими входящим и выходящим потоками требований на основе теоретических формул. Рассмотрен конкретный пример системы массового обслуживания с пуассоновскими входящим и выходящим потоками требований с тремя обслуживающими приборами. Результаты работы программы приведены в **приложении В**.

5. Вычислены основные характеристики системы массового обслуживания с ожиданием с пуассоновскими входящим и выходящим потоками требований на основе дискретной модели и на основе теоретических формул для одних и тех же входных параметров. Проведен сравнительный анализ практических и теоретических характеристик.