

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

**С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ ТРУБЫ КОЛЬЦЕВОГО**

**СЕЧЕНИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ**

**Автореферат бакалаврской работы**

студента 4 курса 413 группы

направление 01.03.02 - Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Михеев Александр Андреевич

Научный руководитель

доцент, к.т.н.

И.А. Панкратов

Зав. кафедрой

д.ф. – м. н.

Ю.А. Блинков

Саратов 2017

## ВВЕДЕНИЕ

Дипломная работа посвящена анализу распространения нелинейных волн деформаций в упругих физически нелинейных соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними. Волновые процессы в упругой цилиндрической оболочке без взаимодействия с жидкостью ранее исследованы с позиций теории солитонов. Наличие жидкости потребовало разработки новой математической модели и компьютерного моделирования процессов, происходящих в рассматриваемой системе.

Приведение систем алгебраических, дифференциальных и разностных уравнений к канонической форме, называемой базисом Грёбнера, представляет собой качественный аналитический метод исследования соответствующих математических моделей.

В частности, при поиске частных решений дифференциальных уравнений методом неопределённых коэффициентов возникают переопределённые системы алгебраических уравнений. Построение базиса Грёбнера позволяет проверить совместность системы, определить, обладает ли система конечным или бесконечным числом решений, а в ряде случаев построить решения в явном виде.

Не для всех моделей, описываемых уравнениями в частных производных, удаётся построить аналитические решения и в этом случае для их исследования можно применять численные эксперименты на соответствующих разностных схемах. Так, для построения разностных схем из первоначально заданных базовых разностных соотношений, аппроксимирующих исходную систему дифференциальных уравнений, строится базис Грёбнера разностного идеала. Из этого базиса, иногда в нелинейном и всегда в линейном случае, можно извлечь разностную схему, которую невозможно построить традиционными методами генерации разностных схем. Зачастую такие разностные схемы обладают уникальными свойствами, хорошо передающими физику процессов, описываемых исходными дифференциальными уравнениями.

Кроме того, знание базиса Грёбнера даёт возможность проверить совместность исходных разностных соотношений, определить произвол в решении, посчитав полином Гильберта, и, применяя специальный вид допустимого упо-

рядочения при его построении, получить другое представление первоначальных разностных соотношений.

В представленной работе данная техника будет использована, в качестве примера, для анализа распространения нелинейных волн деформаций в упругих физически нелинейных соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними.

В первой части дан вывод основных уравнений построенной математической модели. Во второй части приведены точные решения для некоторых наборов параметров входящих в исследуемое уравнение, а также выведены некоторые свойства. Третья часть посвящена компьютерному моделированию. В ней построена разностная схема и приведена ее проверка на точных решениях и построены решения с учетом влияния жидкости на оболочку.

## 1 Построение математической модели

Рассмотрим бесконечно длинные соосные упругие цилиндрические оболочки, между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнения неразрывности в цилиндрической системе координат  $r, \vartheta, x$  записываются в случае осесимметричного течения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right); \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

На границах с оболочками выполняются условия прилипания жидкости

$$V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}, \quad V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} \quad \text{при} \quad r = R_i - W^{(i)}. \quad (1.2)$$

Здесь  $t$  – время;  $V_r, V_x$  – проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат;  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  $U^{(i)}$  – продольное упругое перемещение оболочек по оси  $x$ ;  $W^{(i)}$  – прогиб, положительный к центру кривизны оболочки;  $R_1$  – внутренний радиус внешней оболочки;  $R_2$  – внешний радиус внутренней оболочки ( $R_1 = R_2 + \delta$ );  $\delta$  – толщина слоя жидкости в кольцевом сечении трубы;  $i = 1$  относится к внешней, а  $i = 2$  – к внутренней оболочке.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрических оболочек в перемещениях для модели Кирхгофа-Ляве, считаем материал нелинейноупругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений  $\sigma_1$  от интенсивности деформаций  $e_1$

$$\sigma_1 = Ee_1 + me_1^3. \quad (1.3)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга;  $m$  – константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие.

Кроме этого учтем конструкционное демпфирование в материале оболочки, характеризуемое величиной, пропорциональной  $\partial W^{(i)}/\partial t$ , добавляемой к Даламберовой силе инерции.

Уравнения динамики физически нелинейных оболочек с учетом (1.3) записываются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{E^{(i)}h_0^{(i)}}{1-\mu_0^{(i)2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right\} + \frac{4}{3} \frac{m^{(i)}h_0^{(i)}}{1-\mu_0^{(i)2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^3 - \right. \\ & \left. - \left( 1 + \mu_0^{(i)} \right) \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) - \mu_0^{(i)} \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^3 \right\} - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} = -q_x^{(i)}, \\ & \frac{E^{(i)}h_0^{(i)}}{1-\mu_0^{(i)2}} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} \frac{\partial^4 W^{(i)}}{\partial x^4} - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right\rangle + \frac{4}{3} \frac{m^{(i)}h_0^{(i)}}{1-\mu_0^{(i)2}} \frac{1}{R^{(i)}} \left[ \mu_0^{(i)} \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^3 - \right. \\ & \left. - \left( 1 + \mu_0^{(i)} \right) \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) - \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^3 \right] + \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} + \\ & + \varepsilon_g^{(i)} \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} = q_n (-1)^{i-1}. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon_g^{(i)}$  – коэффициент демпфирования;  $\rho_0^{(i)}$  – плотность материала оболочки;  $\mu_0^{(i)}$  – коэффициент Пуассона;  $R^{(i)}$  – радиусы срединной поверхности оболочек;  $h_0^{(i)}$  – толщины оболочек ( $h_0^{(1)}/2 = R^{(1)} - R_1$ ,  $h_0^{(2)}/2 = R_2 - R^{(2)}$ );  $c_0^{(i)}$  – скорость звука в материале оболочки;  $q_x^{(i)}$ ,  $q_n$  – напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения.

Принимая за характерную длину – длину волны  $l$ , и считая, что соосные оболочки изготовлены из одного материала, то есть, опуская индекс  $i$  у  $E, m, \rho_0, \mu_0, \varepsilon_g$ , перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (1.4). Проводя гомоздкие вычисления окончательно получим

$$\varphi^{(i)}_t + \varphi^{(i)}_{\eta\eta\eta} + 6\varphi^{(i)2} \varphi^{(i)}_{\eta} - \sigma_g \varphi^{(i)}_{\eta\eta} - (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) (-1)^i = 0. \quad (1.5)$$

## 2 Точные решения и некоторые аналитические оценки

Новые решения методом неопределённых коэффициентов для системы уравнений (1.5) будем искать в виде:

$$\theta = k(\eta + \eta_0) - \omega t,$$

$$\varphi^{(i)} = \frac{e^\theta}{a^{(i)}e^{2\theta} + b^{(i)}e^\theta + c^{(i)}} + d^{(i)}.$$

После подстановки на 11 переменных  $a^{(i)}, b^{(i)}, c^{(i)}, d^{(i)}, k, \omega, \sigma_g$  получим достаточно громоздкую систему из 22 уравнений для исследования которой, по-сторон базис Грёбнера.

В результате имеем только одно нетривиальное решение:

$$\theta = k(\eta + \eta_0) - \left(k^3 + \frac{3}{2}b^2k^5\right)t,$$

$$\varphi^{(i)} = \frac{e^\theta}{\frac{1}{4}\frac{b^2k^2+1}{ck^2}e^{2\theta} + be^\theta + c} + \frac{1}{2}bk^2. \quad (2.1)$$

Здесь  $b, c, k$  произвольные постоянные. Остальные нетривиальные решения, имеют мнимую часть и должны быть отброшены как не физические.

Эти точные решения будут использованы для проверки разностных схем, которые будут получены в разделе 3.

Обозначим через  $C_+^{(i)}, C_-^{(i)}$  постоянные значения, к которым асимптотически стремятся функции начального условия при  $\eta \rightarrow +\infty$  и  $\eta \rightarrow -\infty$  соответственно:

$$\varphi^{(i)} \rightarrow C_\pm^{(i)}, \quad \left(\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial\eta}, \frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial\eta^2}, \frac{\partial^3\varphi^{(i)}}{\partial\eta^3} \rightarrow 0\right), \quad \eta \rightarrow \pm\infty, \quad t = 0; \quad i = 1, 2. \quad (2.2)$$

Из уравнений (1.5) при  $\sigma_g = 0$  с начальными условиями (2.2) следуют нестационарные граничные условия на бесконечности

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} \rightarrow \varphi_{\pm\infty}^{(1)}(t) &\equiv \frac{1}{2} \left( C_{\pm}^{(1)} + C_{\pm}^{(2)} \right) + \frac{1}{2} \left( C_{\pm}^{(1)} - C_{\pm}^{(2)} \right) e^{-2t}, \\ \varphi^{(2)} \rightarrow \varphi_{\pm\infty}^{(2)}(t) &\equiv \frac{1}{2} \left( C_{\pm}^{(1)} + C_{\pm}^{(2)} \right) - \frac{1}{2} \left( C_{\pm}^{(1)} - C_{\pm}^{(2)} \right) e^{-2t}, \\ \left( \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^3 \varphi^{(i)}}{\partial \eta^3} \rightarrow 0 \right), &\quad \eta \rightarrow \pm\infty, \quad t \geq 0; \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Умножим первое и второе уравнения (1.5) на искомые функции  $\varphi^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$  соответственно и приведем уравнения к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi^{(1)2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ 2 \varphi^{(1)3} + \varphi \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \varphi^{(1)} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi^{(2)2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ 2 \varphi^{(2)3} + \varphi \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \varphi^{(2)} (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Снесем граничные условия из бесконечности на концы отрезка  $[a, b]$  и введем норму функций на временном слое

$$\|\varphi\|^2 = \int_a^b \varphi^2(\eta, t) d\eta. \quad (2.5)$$

Взяв интегралы от уравнений (2.4) в пределах  $a, b$  и учитывая граничные условия (2.3), получим дифференциальные соотношения для явной зависимости от времени для разности квадратов норм искомых функций:

$$\begin{aligned} \|\varphi^{(1)}\|^2 - \|\varphi^{(2)}\|^2 &= e^{-2t} \left[ D_0 - 3t (A_+^2 B_+ - A_-^2 B_-) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (B_+^3 - B_-^3) (1 - e^{-4t}) \right], \\ D_0 &= \left( \|\varphi^{(1)}\|^2 - \|\varphi^{(2)}\|^2 \right)_{t=0}, \\ A_{\pm} &= C_{\pm}^{(1)} + C_{\pm}^{(2)}, \\ B_{\pm} &= C_{\pm}^{(1)} - C_{\pm}^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Оценка (2.6) может быть использована для интегрального контроля точности численного решения рассматриваемой задачи.

### 3 Компьютерное моделирование

Если исходные уравнения будут содержать производные выше первого порядка, то будет необходимо воспользоваться интегро-интерполяционным методом, значительным недостатком которого является отход от работы только с интегральными соотношениями и прямая замена производных их конечными разностями. Если на этом шаге добавить интегральные соотношения, которые связывают искомые функции и их производные, а далее использовать алгоритм Бухбергера для построения базисов Грёбнера или инволютивный алгоритм, то получатся соотношения, которые связывают только искомые функции.

Уравнение (1.5) в интегральной форме записывается в виде

$$\oint_{\partial\Omega} \left( -3\sigma_0\phi^{(i)2} - \phi^{(i)}_{\eta\eta} \mp 2\sigma_1\phi^{(i)3} \right) dt + \phi^{(i)} d\eta - \iint_{\Omega} \left( \phi^{(1)} - \phi^{(2)} \right) (-1)^i dt d\eta = 0 \quad (3.1)$$

для любой области  $\Omega$ . Чтобы перейти к дискретной формулировке, сопоставим  $u^{(i)n}_j = \phi^{(i)}(t_n, \eta_j)$  и в качестве базового контура выберем контур, изображенный на рис. 3.1.

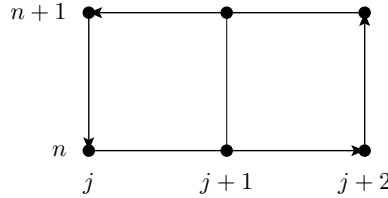


Рисунок 3.1 — Базовый контур для уравнения (3.1)

Необходимо добавить интегральные соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{\eta} d\eta &= u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j), \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{\eta\eta} d\eta &= u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_j). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Используем формулу трапеций для интегрирования по времени и по четным производным по  $\eta$  и формулу среднего значения для интегрирования по нечетным производным по  $\eta$ , и полагаем  $t_{n+1} - t_n = \tau$ ,  $\eta_{j+1} - \eta_j = h$ . Тогда соотношения (3.1),(3.2) переписутся в виде



$$\begin{aligned}
& \left( -3\sigma_0 \left( u^{(i)2n}_j + u^{(i)2n+1}_j - u^{(i)2n}_{j+2} - u^{(i)2n+1}_{j+2} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \left( u^{(i)n}_{\eta\eta j} + u^{(i)n+1}_{\eta\eta j} - u^{(i)n}_{\eta\eta j+2} - u^{(i)n+1}_{\eta\eta j+2} \right) \mp \right. \\
& \quad \left. \mp 2\sigma_1 \left( u^{(i)3n}_j + u^{(i)3n+1}_j - u^{(i)3n}_{j+2} - u^{(i)3n+1}_{j+2} \right) \right) \cdot \frac{\tau}{2} + (u^{(i)n+1}_{j+1} - u^{(i)n}_{j+1}) \cdot 2h - \\
& \quad - (u^{(1)n+1}_{j+1} + u^{(1)n}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j+1} + u^{(2)n}_{j+1})(-1)^i \cdot h\tau = 0, \\
& \quad (u^{(i)n}_{\eta j+1} + u^{(i)n}_{\eta j}) \cdot \frac{h}{2} = u^{(i)n}_{j+1} - u^{(i)n}_j, \\
& \quad u^{(i)n}_{\eta j+1} \cdot 2h = u^{(i)n}_{\eta j+2} - u^{(i)n}_{\eta j}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Вводя сеточные операторы сдвига  $\theta_t, \theta_\eta$  по переменным  $t, \eta$  соответственно, запишем уравнения в операторной форме:

$$\begin{aligned}
& -(1 + \theta_t - \theta_\eta^2 - \theta_t\theta_\eta^2) \circ (3\sigma_0 u^{(i)2} + u^{(i)}_{\eta\eta} \mp 2\sigma_1 u^{(i)3}) \cdot \frac{\tau}{2} + \\
& + (\theta_\eta\theta_t - \theta_\eta) \circ u^{(i)} \cdot 2h - (\theta_\eta\theta_t + \theta_\eta) \circ (u^{(1)} - u^{(2)})(-1)^i \cdot h\tau = 0, \\
& (\theta_\eta + 1) \circ u^{(i)}_\eta \cdot \frac{h}{2} = (\theta_\eta - 1) \circ u^{(i)}, \\
& \theta_\eta \circ u^{(i)}_{\eta\eta} \cdot 2h = (\theta_\eta^2 - 1) \circ u^{(i)}_\eta.
\end{aligned}$$

Выбирая допустимое лексикографическое упорядочение сначала по функциям  $u^{(1)}_{\eta\eta} \succ u^{(2)}_{\eta\eta} \succ u^{(1)}_\eta \succ u^{(2)}_\eta \succ u^{(1)} \succ u^{(2)}$ , затем по переменным  $\theta_t \succ \theta_\eta$  можно построить инволютивный базис или базис Грёбнера. В результате получим, в качестве отдельных элементов базиса Грёбнера, следующие разностные схемы для уравнений (1.5), аналогичные схеме Кранка-Николсона

для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned}
& \frac{u_j^{(i)n+1} - u_j^{(i)n}}{\tau} + 3\sigma_0 \frac{(u_{j+1}^{(i)2n+1} - u_{j-1}^{(i)2n+1}) + (u_{j+1}^{(i)2n} - u_{j-1}^{(i)2n})}{4h} + \\
& + \frac{(u_{j+2}^{(i)n+1} - 2u_{j+1}^{(i)n+1} + 2u_{j-1}^{(i)n+1} - u_{j-2}^{(i)n+1}) + (u_{j+2}^{(i)n} - 2u_{j+1}^{(i)n} + 2u_{j-1}^{(i)n} - u_{j-2}^{(i)n})}{4h^3} \\
& \mp 2\sigma_1 \frac{(u_{j+1}^{(i)3n+1} - u_{j-1}^{(i)3n+1}) + (u_{j+1}^{(i)3n} - u_{j-1}^{(i)3n})}{4h} - \\
& - \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n} - u_j^{(2)n+1} - u_j^{(2)n}}{2} (-1)^i = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Полученные неявные разностные схемы имеют квадратичную и кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована следующая линеаризация

$$v_{k+1}^3 = v_{k+1}^3 - v_k^3 + v_k^3 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1}^2 + v_{k+1}v_k + v_k^2) + v_k^3 \approx v_{k+1} \cdot 3v_k^2 - 2v_k^3.$$

$$v_{k+1}^2 = v_{k+1}^2 - v_k^2 + v_k^2 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v_k^2 \approx v_{k+1} \cdot 2v_k - v_k^2.$$

Шаг по времени  $t$  брался равным половине шага по переменной  $\eta$ . Программа расчёта была написана на языке Python с использованием пакета SciPy.

Проведенное моделирование позволяет сделать вывод, что рассматриваемая механическая система начинает вести себя как единый трехслойный пакет с двумя несущими слоями (внешняя и внутренняя оболочки), по которым распространяются волны деформаций, и заполнителя – слоя вязкой несжимаемой жидкости.

Проведенное моделирование с использованием компьютерной алгебры показало особенности поведения волн деформаций в геометрически и физически нелинейных соосных упругих цилиндрических оболочках, содержащих несжимаемую вязкую жидкость между ними.

Использование техники базисов Грёбнера для построения разностной схемы при численном решении задачи Коши для системы двух нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка по пространственной переменной позволило получить результат расчета без осцилляций, вызываемых

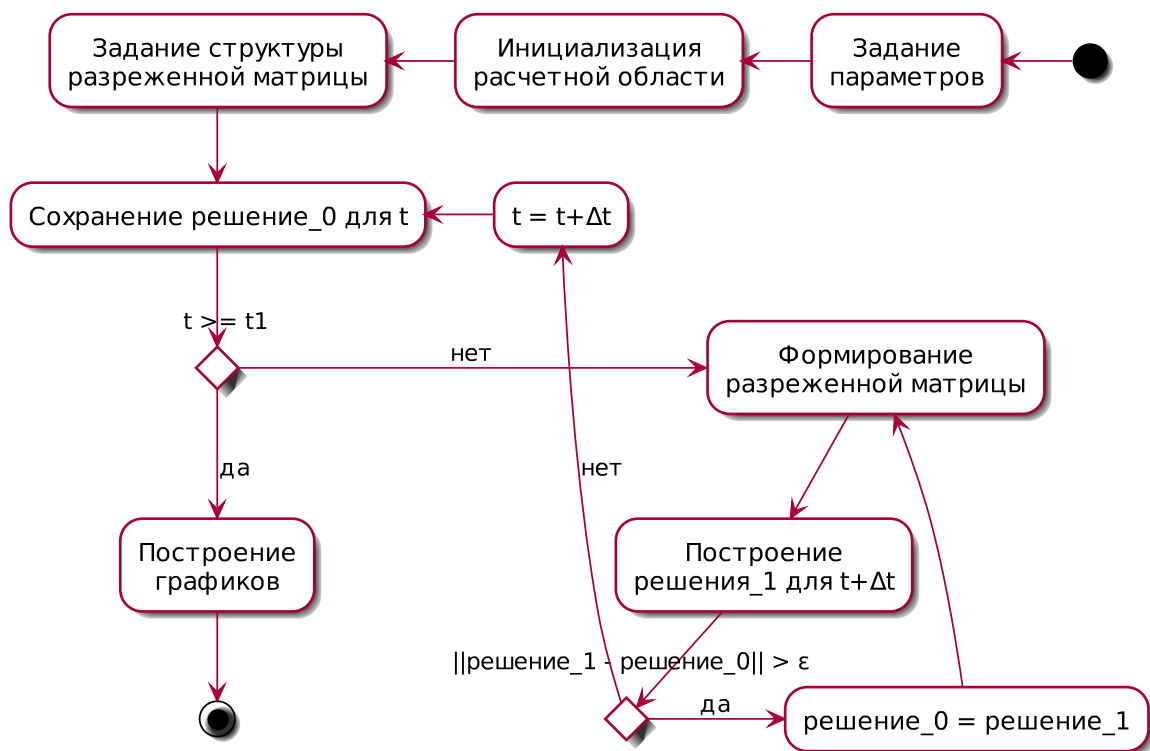


Рисунок 3.2 — Диаграмма действий UML программы

численной реализацией. Численная схема была протестирована на точном решении при отсутствии жидкости.

Полученный расчет позволил сделать выводы о влиянии несжимаемой вязкой жидкости на поведение нелинейной волны деформаций в соосных оболочках. Наличие волны деформаций во внешней оболочке приводит к возникновению волны деформаций во внутренней оболочке, которой не было в начальный момент времени, и происходит «перекачка энергии» (через слой жидкости) от внешней оболочки к внутренней, которая сопровождается немонотонным падением амплитуды волны во внешней оболочке, и, как следствие, немонотонным снижением скорости её распространения. При этом во внутренней оболочке происходит немонотонное увеличение амплитуды. Вследствие колебаний амплитуд и скоростей, с течением времени их скорости и амплитуды выравниваются. Эти амплитуды в два раза меньше исходной амплитуды для случая двух соосных оболочек.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное моделирование позволяет сделать вывод, что рассматриваемая механическая система начинает вести себя как единый трёхслойный пакет с двумя несущими слоями (внешняя и внутренняя оболочки), по которым распространяются волны деформации, и заполнителя – слоя вязкой несжимаемой жидкости.

Проведённое компьютерное исследование новой математической модели с использованием теории базисов Грёбнера позволило найти новое аналитическое решение МКдВ, а также построить качественную разностную схему, которая по построению соответствует исходной непрерывной модели.

Следует отметить, что все результаты справедливы для оболочки очень малого радиуса, а частности для мелких кровеносных сосудов.