

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

Разработка программного комплекса расчёта задачи гидроупругости

двух соосных цилиндрических оболочек, жёстко закреплённых на
концах при пульсации давления

Автореферат бакалаврской работы

студентки 4 курса 413 группы

направление Прикладная математика и информатика 01.03.02

механико-математического факультета

Назаркиной Любови Ивановны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент

Д.В.Кондратов

Зав. кафедрой
д.ф. – м. н.

Ю.А. Блинков

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

В современном железнодорожном, автомобильном и авиационном транспорте, а также ракетно-космических системах используются машины, агрегаты и приборы, которые, как правило, представляют собой сложные механические системы. В связи с вышесказанным, представляет несомненный научный и практический интерес постановка и решение задач упругогидродинамики в реальных конструкциях, нацеленных на исследование проблем динамики и прочности в различных отраслях машино- и приборостроения. Необходимость учета влияния упругой податливости конструкций включающей жидкость подтверждается практикой и представляет собой чрезвычайно сложную и трудоемкую задачу, даже в простейших постановках, требуя разработки и исследования сложных математических моделей механических систем абсолютно жестких, упругих и жидких тел, которые учитывают динамическое взаимодействие между данными телами. Поэтому актуальной является проблема создания и исследования моделей таких механических систем, предельно приближающихся к оригиналу, поиска подходящих форм записи разрешающих дифференциальных уравнений и методов их интегрирования, приемлемых для приложений к практике, и позволяющих исследовать динамические процессы в данных системах, используемых на различном виде транспорте.

Основной отличительной особенностью предлагаемой работы являются построение и исследование математических моделей, учитывающих реальные физико-механические свойства исследуемых механических систем, содержащих соосные замкнутые оболочки, сдавливающие слой вязкой несжимаемой жидкости. В основу предложенных моделей положено представление их в виде связанной системы уравнений для каждой из составляющих и ее анализа, позволившего синтезировать амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики, силы и моменты, действующие на упругие оболочки и абсолютно жесткие тела. 1. Предложена общая математическая модель механической системы, состоящей из двух соосных упругих замкнутых цилиндрических оболочек конечной длины, содержащих слой вязкой несжимаемой жидкости между ними при гармонически по времени изменяющемся давлении на торцах. Математическая модель представляет собой связанную систему уравне-

ний в частных производных, описывающих динамику упругих цилиндрических оболочек и жидкости с соответствующими граничными условиями. 2. На основе общей модели, введением ограничения на отсутствие вибрации, получена новая математическая модель кольцевой трубы с упругими внутренней и внешней оболочками при воздействии гармонически изменяющегося давления на входе и выходе из трубы, учитывающая упругую податливость внутренней и внешней оболочек и инерцию движения жидкости. В широком диапазоне параметров найдены резонансные частоты, оказывающие негативное влияние на конструкцию, и определено влияние типоразмеров и параметров жидкости на амплитудно-частотные характеристики оболочек кольцевой трубы. 3. Разработан программный комплекс, позволяющий производить оперативный расчет значений резонансных частот амплитудно-частотных характеристик, описанных математических моделей.

1 Основная часть дипломной работы

Предполагается, что внешняя оболочка 1 – упругая замкнутая цилиндрическая оболочка с внутренним радиусом R_1 и с жестким защемлением по торцам. Внутренняя оболочка 2, с внешним радиусом R_2 – также упругая замкнутая цилиндрическая оболочка, жестко защемленная по торцам. Зазор между стенками оболочек 2 и 1 полностью заполнен жидкостью 3. Наружная поверхность внешней оболочки и поверхность внутренней оболочки образуют цилиндр в цилиндре длиной l_2 . Радиальный зазор цилиндрической щели $\delta = R_1 - R_2 \ll R_2$. Торцевые зазоры рабочей камеры, с абсолютно жесткими стенками, имеют протяженность a , значительно большую радиального зазора ($a \gg \delta$). На систему действуют гармонически меняющееся по времени на торцах давление, а на всю систему переносная сила инерции. Перемещение внутренней оболочки относительно внешней на защемленных торцах отсутствует. Механическая система считается термостабилизированной. При исследовании динамики указанной механической системы для демпфирующего слоя жидкости, окружающей внутреннюю оболочку, принята модель вязкой несжимаемой жидкости. Учет вязкости необходим, так как именно она создает демпфирующие свойства, что предотвращает бесконечно большие прогибы при резонансе. Жидкость принята несжимаемой, так как характерная скорость течения ее значительно меньше скорости звука (число Маха значительно меньше единицы). Если бы частота колебаний внешнего источника вибрации была столь велика, что возникающая при этом скорость течения жидкости была бы соизмерима со скоростью звука (число Маха было бы не менее 0,4), учет сжимаемости был бы необходим. Но обычно частоты колебаний источника вибрации (переносное ускорение) или перепад давления таковы, что скорость движения жидкости в зазоре весьма мала и жидкость можно считать несжимаемой.

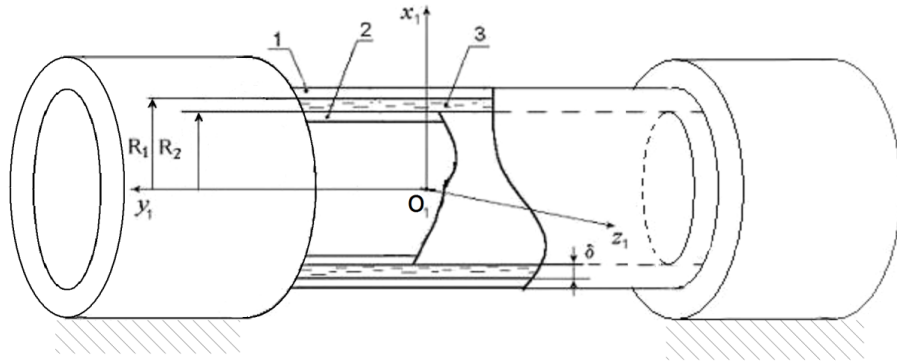


Рисунок 1.1

Рассматривается механическая система, состоящая из двух соосных упругих цилиндрических оболочек конечной длины с жёстким защемлением по торцам, сдавливающих слой вязкой несжимаемой жидкости на которую воздействует гармоническое по времени давление, приложенное на торцах механической системы (в соответствии с рис.1.1). Так как модель симметрична относительно оси, то можно упростить постановку задачи, рассмотрев осесимметричный случай. Так как течение жидкости между оболочками осесимметричное, то в цилиндрической системе координат уравнениями механики жидкости имеют вид [7, 8, 9, 10]:

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} + \frac{\partial V_k}{\partial r} + V_y \frac{\partial V_k}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial k} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_k}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_k}{\partial y^2} - \chi \frac{V_r}{r^2} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $k=r$ или y ; $x=1$ при $k=r$, $x=0$ при $k=y$; V_y, V_r – компоненты вектора скорости жидкости в цилиндрической системе координат (\vec{n}_r, \vec{j}) , начало которой находится в центре внутренней оболочки; p – давление жидкости; ρ – плотность жидкости; ν – кинематический коэффициент вязкости; χ – координата вдоль оси симметрии Oy ; r – расстояние от оси Oy ; t – время.

Граничные условия (1.6) представляют собой условия прилипания жидкости к поверхностям оболочек и условия для давления на концах механической системы:

$$V_r = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t}, V_y = -\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t} r = r^{(i)} \quad (1.3)$$

$$p = p^+ : \forall y = \frac{l}{2}, p = p^+ : \forall y = -\frac{l}{2},$$

где $i = 0$ для внешней оболочки, $i = 2$ для внутренней оболочки, $\partial u_3^{(i)}$ – прогибы оболочек, положительные в сторону противоположную центру кривизны; $\partial u_1^{(i)}$ – продольные перемещения оболочек, положительные в сторону противоположную оси Oy ,

$$r^{(1)} = R_2 + \delta + u_3^{(1)}, r^{(2)} = R_2 + \delta + u_3^{(2)}. \quad (1.4)$$

Уравнения динамики упругих цилиндрических оболочек, между которыми протекает жидкость в осесимметричном случае описываются уравнениями теории Кирхгофа-Лява [1, 4, 5, 11, 17]. Для внешней и внутренней оболочек имеем:

$$\frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial y^2} - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \frac{\partial^2 u_3^{(i)}}{\partial y} = \frac{1 - (\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} \left[\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial t^2} - q_s^{(i)} \right], \quad (1.5)$$

$$-\frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial y} + \frac{u_3^{(i)}}{R^{(i)}} + \left(a_0^{(i)} R^{(i)} \right)^2 \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial y^4} = \quad (1.6)$$

$$= \frac{1 - (\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} \left[-\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 u_0^{(i)}}{\partial t^2} - (-1)^i q_n^{(i)} \right],$$

где $E^{(i)}$ – модули Юнга материала оболочек; $\mu_0^{(i)}$ – коэффициенты Пуассона материала оболочек, $\rho_0^{(i)}$ – плотности материала оболочек,

$$a_0^{(i)} = \sqrt{\left(h_0^{(i)} \right)^2 / \left(12 \left(R^{(i)} \right)^2 \right)} \quad (1.7)$$

$$q_s^{(i)} = - \left[P_{ry} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{yy} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{j}) \right] |_{r = r^{(i)}} \quad (1.8)$$

$$q_n^{(i)} = - \left[P_{rr} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_r) + P_{ry} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{j}) \right] |_{r = r^{(i)}} \quad (1.9)$$

$$P_{ry} = \rho \nu \left(\frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial y} \right); P_{kk} = -p + 2\rho \nu \frac{\partial V_k}{\partial k} k = ry \quad (1.10)$$

$$\cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{n}_r) = \frac{r^{(i)}}{|\overline{N^{(i)}}|} \cos^{(i)}(\bar{n}, \bar{j}) = -\frac{r^{(i)}}{|\overline{N^{(i)}}|} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} \quad (1.11)$$

$$|\overline{N^{(i)}}| = \left\{ \left(r^{(i)} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.12)$$

где \bar{n} – единичный вектор нормали к срединной поверхности верхней и нижней оболочек; $\bar{S} = -\bar{j}$ – единичный вектор в продольном направлении в срединных поверхностях оболочек, противоположный вектору \bar{j} ; \bar{n}_r, \bar{j} – единичные векторы полярной системы координат.

Граничные условия (1.10), (1.11) для перемещений оболочки состоят в условиях жесткой заделки:

$$u_1^{(i)} = u_3^{(i)} = \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} = 0, \quad (1.13)$$

при $y = \pm l/2$

Для решения получившейся задачи гидроупругости применяем метод описанный в разделе 1, для этого переходим к следующим безразмерным переменным

$$\xi = (r - R_2)/\delta, \zeta = 2y/l, \tau = \omega t, \sigma = (l/(2R_2)), \psi = \delta/R_2 \ll 1, \quad (1.14)$$

$$V_r = w_m^{(1)} \omega u_\xi, V_y = \left(w_m^{(1)} \omega / \psi \right) \sigma u_\zeta; u_1^{(i)} = u_m^{(i)} U_1^{(i)}, u_3^{(i)} = u_m^{(i)} U_3^{(i)} \quad (1.15)$$

$$p = p_0 + \frac{\rho R_2 w_m^{(1)} x^2}{\psi Re} P, \lambda^{(i)} = w_m^{(i)} / \delta, Re = \delta^2 \omega / \nu, \lambda^2 = \left(w_m^{(2)} / w_m^{(1)} \right) \lambda^{(1)} \quad (1.16)$$

Тогда в безразмерных переменных (1.14) уравнения динамики жидкости (1.1) запишутся в виде:

$$\psi^2 Re \left[\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + u_\zeta \frac{\partial u_\xi}{\partial \zeta} \right] = \quad (1.17)$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \psi^2 \left(\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\psi}{1 + \xi\psi} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} - \left(\frac{\psi}{1 + \xi\psi} \right)^2 u_\xi + \frac{\psi^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \zeta^2} \right)$$

$$Re \left[\frac{\partial u_\zeta}{\partial \tau} + \lambda \left(u_\xi \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi} + u_\zeta \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] = \quad (1.18)$$

$$-\frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial \zeta^2} + \frac{\psi}{1 + \xi\psi} \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi} + \frac{\psi^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial \zeta^2}$$

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \nu \xi} + \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{\psi}{1 + \xi\psi} u_\xi = 0 \quad (1.19)$$

Граничные условия представляют собой условия прилипания жидкости к поверхностям оболочек и условия для давления на торцах, в безразмерных переменных имеющие вид:

$$u_\xi = \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial \tau}, u_\zeta = -\frac{\psi}{\sigma} \frac{u_m^{(1)}}{w_m^{(1)}} \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \tau}, \xi = \xi^{(1)} = 1 + \lambda^{(1)} U_3^{(1)} \quad (1.20)$$

$$u_\xi = \frac{\partial U_3^{(2)}}{\partial \tau}, u_\zeta = -\frac{\psi \lambda^1}{\sigma \lambda^2} \frac{u_m^{(2)}}{w_m^{(2)}} \frac{\partial U_1^{(2)}}{\partial \tau}, \xi = \xi^{(2)} = \lambda^{(2)} U_3^{(2)} \quad (1.21)$$

$$P = P^+, \zeta = 1; P = P^-, \zeta = -1 \quad (1.22)$$

Уравнения динамики внутренней и внешней упругих замкнутых цилиндрических оболочек, в безразмерных переменных представлены как:

$$\left(\frac{2R^{(i)}}{l} \right)^2 u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \zeta^2} - \mu_0^{(i)} \frac{2R^{(i)}}{l} w_m^{(i)} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \zeta} - \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(R^{(i)})^2 w^2}{(c^{(i)})^2} u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \tau^2} = -\frac{(R^{(i)})^2}{\rho_0^{(i)} h_o^{(i)} (c^{(i)})^2} q_s^{(i)} \\
& \mu_0^{(i)} \frac{2R^{(i)}}{l} u_m^{(i)} \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial \zeta} + w_m^{(i)} U_3^{(i)} + \left(a_0^{(i)}\right)^2 \left(\frac{2R^{(i)}}{l}\right)^4 w_m^{(i)} \frac{\partial^4 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^4} + \\
& + \frac{(R^{(i)})^2 w^2}{(c^{(i)})^2} w_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_3^{(i)}}{\partial \tau^2} = (-1)^{i-1} \frac{(R^{(i)})^2}{\rho_0^{(i)} h_o^{(i)} (c^{(i)})^2}
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Напряжения на поверхностях оболочек со стороны слоя жидкости записываются в виде:

$$q_n^{(i)} = z^{(i)} \left\{ p_0 + \frac{\rho R_2 w_m^{(i)} \omega \nu}{\psi \delta^2} \left[P - 2\psi^2 \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \lambda^{(i)} \psi^2 \left(\frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi} + \frac{\psi^2}{\sigma^2} \frac{\partial u_\xi}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \zeta} \right] \right\} \tag{1.25}$$

$$\xi = \xi^{(i)}, z^{(i)} = \left[1 + \frac{\lambda^{(i)} \psi^2}{\sigma^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{1.26}$$

Граничные условия для упругих перемещений могут быть представлены условиями жесткого защемления:

$$U_1^{(i)} = U_3^{(i)} = \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \zeta} = 0, \zeta = \pm 1 \tag{1.27}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривается механическая система, на примере цилиндрической трубы кольцевого профиля, применяемая в системах охлаждения. На кольцевую трубу будет воздействовать только гармонический перепад давления на входе и выходе из трубы. Сделан переход к осесимметричному случаю и к безразмерным переменным. В результате решения нелинейной связанной задачи гидроупругости методом возмущений получены амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики для каждой из оболочек. Сделан предельный переход к случаям абсолютно жесткой внешней оболочки, но упругой внутренней оболочки, и абсолютно жесткой внутренней оболочки, но упругой внешней оболочки, получены амплитудно-частотные характеристики для каждой из этих моделей. Проведено исследование влияния параметров механической системы на ее амплитудно-частотные характеристики. Смоделировано поведение давления в слое жидкости кольцевой трубы в зависимости от времени работы и показана возможность возникновения кавитации.