

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

**ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ВБЛИЗИ ПЕРЕДНЕЙ
КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗАТУПЛЕННОГО ПОРИСТОГО ТЕЛА**

Автореферат бакалаврской работы

студентки 4 курса 413 группы

направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Пимановой Анны Сергеевны

Научный руководитель
ассистент

В.С. Кожанов

Зав. кафедрой
д.ф. – м. н.

Ю.А. Блинков

ВВЕДЕНИЕ

На то обстоятельство, что прилипание жидкости может оказать существенное влияние на характер течения и его закономерности, указано ещё в гидродинамике Д. Бернулли. В работах Навье, Пуассона и Стокса также имеются указания на то, что в связи с учётом вязкости жидкости должны измениться граничные условия вблизи стенок. Но эти указания всё ещё не давали основания к утверждению того, что вязкость жидкости проявляется главным образом только вблизи твёрдых стенок.

Идея о преобладающем влиянии вязкости жидкости только вблизи стенок была высказана позднее, а именно в работе Д.И. Менделеева, а затем в лекциях Н.Е. Жуковского. Оформление в виде уравнений эта идея получила в работе Прандтля.

Введение пограничного слоя позволяет существенно упростить моделирующие течение жидкости/газа уравнения путём разделения потока на две области: на область очень тонкого слоя вблизи тела (пограничный слой), где трение играет существенную роль, и на область вне этого слоя, где трением можно пренебрегать.

Эта гипотеза, с одной стороны, позволила получить физически очень наглядное объяснение важной роли вязкости в проблеме сопротивления, а с другой стороны, дала возможность преодолеть математические трудности и тем самым открыла путь теоретическому исследованию течений жидкости с трением.

Для решения задачи о пограничном слое в установившемся двухслойном течении несмешивающихся неньютоновских жидкостей был применён метод преобразования. Нам неизвестны результаты, в которых данная задача решается с помощью метода преобразования, поэтому результаты можно считать новыми.

В работе изучается задача об обтекании затуплённого тела потоком вязкой несжимаемой жидкости набегающей со скоростью $U(x)$. Через пронизываемую поверхность тела вдувается жидкость с параметрами, отличными от параметров набегающего потока, со скоростью

$$V_y(x) = Ax^\alpha (A = const, \alpha = const)$$

В первом разделе выполняется постановка задачи, формулируется система уравнений, описывающих течение в пограничном слое и определяющих начальные и граничные условия.

Во втором разделе осуществлен переход к автомоделным переменным и сформулирована краевая задача в автомоделных переменных.

В третьем разделе рассматривается алгоритм численного решения, а также приводится блок-схема.

В четвертом разделе представлены результаты расчетов, в виде графиков для продольной и поперечной составляющих скорости течение в пограничном слое при различных значениях параметров характеризующих течение, а именно, скорости вдува через поверхность тела, отношениях кинематических k_ν и динамических k_μ возможностей набегающей и вдуваемой жидкостей. Кроме того представлены зависимости для положения границы раздела слоёв и 2-ой производной от автомоделного представителя функции тона при различных значениях k_ν , k_μ и скорости вдува V_y .

1 Основная часть

1.1 Постановка задачи

Двухслойное течение степенных неньютоновских жидкостей вблизи передней критической точки проницаемого тела описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho_i \left(u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) = \rho_i U \frac{dU}{dx} + \mu_i^* n \left| \frac{\partial u_i}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}, \quad i = 1, 2. \quad (1.2)$$

Параметры с индексом «1» относятся к жидкости из внешнего течения $\delta(x) \leq y < \infty$, а с индексом «2» – к жидкости, вдуваемой через поверхность тела $0 < y \leq \delta(x)$, где $y = \delta(x)$ – уравнение границы раздела жидкостей.

Граничные условия на поверхности тела имеют вид

$$\text{при } y = 0, x \geq 0 : \quad u_2 = 0, \quad v_2 = Ax^\beta (A = \text{const}, \beta = \text{const}). \quad (1.3)$$

Граничные условия на границе раздела жидкостей имеют вид

$$\text{при } y = \delta(x) : \quad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 = 0, \quad \mu_1^* \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_2^* \left| \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u_2}{\partial y}. \quad (1.4)$$

Граничные условия вдали от тела («на бесконечности») имеют вид

$$\text{при } y \rightarrow \infty : \quad u_1 \rightarrow U(x) = \alpha x^\gamma (\alpha = \text{const}, \gamma = 1). \quad (1.5)$$

Схема течения изображена в соответствии с рисунком 1.1.

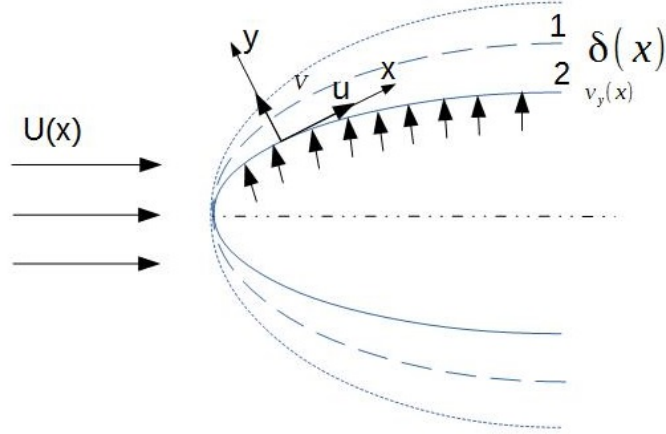


Рисунок 1.1 - Схема течения в
околоности передней критической
точки тела

1.2 Постановка краевой задачи в автомодельных переменных

Введём масштабные величины. Обозначим через L масштаб длины в направлении оси x , через Y – масштаб длины в направлении оси y , через U – масштаб скорости в направлении оси x , через V – масштаб скорости в направлении оси Y . Тогда можно ввести безразмерные переменные по следующим формулам:

$$x = L\bar{x}, \quad y = Y\bar{y}, \quad (1.6)$$

$$u_i = U\bar{u}_i = \alpha L^\gamma \bar{u}_i, \quad v_i = V\bar{v}_i. \quad (1.7)$$

Перейдём в уравнение (1.1) к безразмерным переменным. Для этого подставим (1.6), (1.7) в (1.1):

$$\frac{\alpha L}{L} \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{V}{Y} \cdot \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (1.8)$$

Масштабы в 1-ом и 2-ом слагаемых (1.8) должны совпадать, т.е. $\alpha = \frac{V}{Y}$, следовательно, $V = \alpha Y$.

Перейдём в уравнение (1.2) при $i = 1$ к безразмерным переменным. Для этого подставим (1.6), (1.7), (1.10) в (1.2):

$$\rho_1 \cdot \left(\alpha^2 L \bar{u}_1 \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}} + \alpha^2 L \cdot \bar{v}_1 \cdot \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}} \right) = \mu_1^* \cdot \left(\frac{\alpha L}{Y} \right)^{n-1} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial y^2} \cdot \frac{\alpha L}{Y^2} \cdot n \cdot \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{y}} \right|^{n-1} + \alpha^2 \cdot \rho_1 \cdot L.$$

Масштабы слева и справа в (1.12) должны совпадать, то есть:

$$\rho_1 \cdot \alpha^2 L = \mu_1^* \cdot n \cdot \alpha L \cdot \frac{1}{Y^{n+1}}, \quad (1.9)$$

Из соотношения (1.9) следует, что:

$$Y = \left(\frac{\mu_1^*}{\rho_1} \cdot n \cdot \alpha^{n-2} \cdot L^{n-1} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

Введём в рассмотрение функцию тока $\psi_i = \psi_i(x, y)$. Она вводится с помощью уравнения неразрывности (1.6) и обращает его в тождество:

$$u_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial y}, \quad v_i = -\frac{\partial \psi_i}{\partial x}. \quad (1.10)$$

Для функции тока введём масштаб Ψ по формуле

$$\psi_i = \Psi \bar{\psi}_i(\bar{x}, \bar{y}) \quad (1.11)$$

Найдём масштабы функции тока Ψ . Для этого подставим (1.6), (1.7) и (1.13) в 1-ое уравнение (1.12):

$$\alpha L \bar{u}_i = \frac{\Psi}{Y} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{y}}$$

Приравнявая масштабы слева и справа, получим $\alpha L = \frac{\Psi}{Y}$. Следовательно,

$$\Psi = \alpha \cdot L \cdot Y = \alpha \cdot L \cdot \left(\frac{\mu_1 n}{\rho_1} \cdot \alpha^{n-2} \cdot L^{n-1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (1.12)$$

Перепишем (1.13) с учётом (1.14) и (1.6):

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1} \alpha L^2} \cdot \bar{\psi}_1 \left(\frac{x}{L}, y \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1} \cdot \alpha} \right) \quad (1.13)$$

В постановку задачи, т.е. в систему уравнений (1.1), (1.2) и граничные условия (1.3)-(1.5) не входит масштаб длины l , поскольку рассматривается полу-бесконечное тело. Поэтому в решение задачи для функции тока ψ_1 не должен входить масштаб длины l .

Проведём ряд тождественных преобразований, которые позволят уменьшить присутствие масштаба l в функции тока ψ_i :

$$\psi_i = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1} \cdot \alpha L^2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{x^2}} \cdot \bar{\psi}_1 \left(\frac{x}{L}, y \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}} \right) = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1} \cdot \alpha x^2} \cdot \sqrt{\frac{L^2}{x^2}} \cdot \bar{\psi}_1 \left(\frac{x}{L}, y \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}} \right).$$

Сделаем замену $\sqrt{\frac{L^2}{x^2}} \cdot \bar{\psi}_1 \left(\frac{x}{L}, y \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}} \cdot \alpha \right)$ на функцию $g \left(\frac{x}{L}, y \cdot \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}} \cdot \alpha \right)$, получим:

$$\psi_1 = \alpha \cdot \left(\frac{\mu_1}{\rho_1} \cdot n \cdot \alpha^{n-2} \right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot x^{\frac{2n}{n+1}} \cdot g \left(\frac{x}{L}, y \left(\frac{\mu_1}{\rho_1} \cdot n \cdot \alpha^{n-2} \right)^{-\frac{1}{n+1}} \cdot x^{-\frac{n-1}{n+1}} \right).$$

Поскольку решение задачи для функции тока ψ_1 не должно зависеть от L , то это значит, что функция g не зависит от 1-го аргумента, т.е. соотношение (1.20) можно переписать так: $\psi_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1} \alpha x^2} \cdot \varphi_1(\eta)$, $\eta = y \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}} \alpha$, где η – независимая автомодельная переменная, $\varphi_1(\eta)$ – искомая автомодельная переменная. Функция $\varphi_1(\eta)$ называется автомодельным представителем функции ψ в области 1, где $\eta^* < \eta < \infty$.

Аналогичным образом можно получить автомодельные переменные для области 2, течение в которой описывается уравнением (1.1), (1.2) при $i = 2$ с той лишь особенностью, что вместо коэффициента ν_2 в уравнении (1.2) необходимо использовать коэффициент ν_1 из области 1. В итоге для области 2 имеем:

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1} \alpha x^2} \cdot \varphi_2(\eta), \quad \eta = y \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}} \alpha, \quad (1.14)$$

где $\varphi_2(\eta)$ – искомая автомодельная переменная. Функция $\varphi_2(\eta)$ является ав-

томодельным представлением функции тока ψ в области 2, где $0 \leq \eta \leq \eta^*$.

$$\frac{d^3\varphi_1}{d\eta^3} + \varphi_1 \cdot \frac{d^2\varphi_1}{d\eta^2} - \left(\frac{d\varphi_1}{d\eta}\right)^2 + 1 = 0. \quad (1.15)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение для описания течения в области 2 при $i = 2$:

$$\frac{d^3\varphi_2}{d\eta^3} + \left[\varphi_2 \cdot \frac{d^2\varphi_2}{d\eta^2} - \left(\frac{d\varphi_2}{d\eta}\right)^2 + 1\right]k = 0, \quad (1.16)$$

$$\text{где } k = \frac{k_\rho}{k_\mu} = k_\nu, \quad k_\nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad k_\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad k_\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (1.26) предназначено для определения функции φ_2 , описывающей течение во внутреннем пограничном слое.

Теперь представим граничные условия (1.3), (1.4), (1.5) в автомодельных переменных и получим:

$$\frac{d^2\varphi_1}{d\eta^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{d^2\varphi_2}{d\eta^2} = k_\mu \frac{d^2\varphi_2}{d\eta^2};$$

Следовательно при $\eta = \eta^* : \varphi_1(\eta^*) = \varphi_2(\eta^*) = 0$,

$$\frac{d\varphi_1}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta^*} = \frac{d\varphi_2}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta^*}, \quad \frac{d^2\varphi_1}{d\eta^2} \Big|_{\eta=\eta^*} = k_\mu \frac{d^2\varphi_2}{d\eta^2} \Big|_{\eta=\eta^*}. \quad (1.17)$$

$$\text{Если } y \rightarrow \infty \text{ и } u = \alpha x \frac{d\varphi_1}{d\eta} = \alpha, \text{ то при } \eta \rightarrow \infty : \frac{d\varphi_1}{d\eta} \rightarrow 1. \quad (1.18)$$

Таким образом, в автомодельных переменных решение задачи о конвективном пограничном слое вблизи передней критической точки тела, сводится к решению краевой задачи для (1.15, 1.16) с граничными условиями (1.18) при $\eta = 0$, (1.17) при $\eta = \eta^*$ и (1.18) при $\eta \rightarrow \infty$. Аналитически поставленную краевую задачу решить нельзя.

1.3 Численное решение краевой задачи

Обсудим численное решение уравнения (1.15) и (1.16). Одни из подходов к численному решению задачи является такой:

- 1) проинтегрировать (1.15) с начальным условием (1.3)-(1.5) на отрезке $[0, \eta^*]$;
- 2) по формулам (1.15) вычислить начальные условия при $\eta = \eta^*$ для (1.16);
- 3) проинтегрировать (1.16) с полученными начальными условиями на полуинтервале $[\eta^*, \infty)$.

Для численного интегрирования (1.15) необходимо наличие трёх начальных условий, а именно при $\eta = 0$ необходимо знать:

$$\varphi_2(0) = \varphi_{200}, \quad \left. \frac{d\varphi_2}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \varphi_{210}, \quad \left. \frac{d^2\varphi_2}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = \varphi_{220}.$$

Тогда для (1.15) мы имели бы задачу Коши. Однако в нашем случае известны только два условия (1.15), (1.16). Значение φ_{220} необходимо определить.

При реализации численного интегрирования вместо полуинтервала $[\eta^*, \infty)$ рассматривается интервал $[\eta^*, \eta_m]$, где η_m - достаточно большое число ($\eta_m = 6 \div 8$). Условие (1.5) при этом заменяется условием:

$$\text{при } \eta = \eta_m (\eta_m \gg 1) : \left. \frac{d\varphi_1}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_m} = \varphi_{11m} = 0.$$

Обозначим φ^i - значение функций $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_z$ при $\eta = \eta^*$, а φ_{11m}^i - значение функции φ_1 при $\eta = \eta_m$, полученные при некоторых значениях η_z^i и φ_{220}^i , где i - номер итерации.

Разложим $N_1^i(\eta_z^i, \varphi_{220}^i) = \varphi_z^i - \varphi_z = \varphi_z^i$, $N_2^i(\eta_z^i, \varphi_{220}^i) = \varphi_{11m}^i - \varphi_{11m} = \varphi_{11m}^i - 1$ будем называть невязками.

Пусть $R^i = \sqrt{(N_1^i)^2 + (N_2^i)^2}$. Тогда решение краевой задачи сводится к минимизации значения R^i , то есть при некотором значении $i = M$ мы должны получить $R^M < \varepsilon$, где ε - точность решения.

Остаётся вопрос о том, как выбрать очередные приближения η_z^i и φ_{220}^i . Ответ на него определяется выбором метода решения краевой задачи.

Для решения краевой задачи был применён метод, представляющий собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

1.4 Результат расчётов

В соответствии с рисунками 4.1-4.4 представлены зависимости значений η^* , φ_{20} от коэффициента k_μ при различных значениях k_ν и φ_{00} .

Необходимо подобрать $\frac{d^2\varphi_2}{d\eta^2}\Big|_{\eta=0} = \varphi_{220}$ и η^* так, чтобы выполнялось граничное условие на ∞ : $\frac{d\varphi_1}{d\eta}\Big|_{\eta=\eta_m} = 1$ и условию на границе раздела: $\varphi_2|_{\eta=\eta^*} = \varphi_2|_{\eta=\eta^*} = 0$.

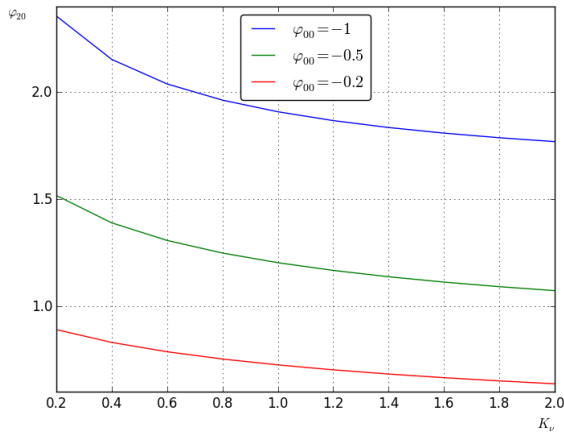


Рисунок 4.1 - $k_\mu = 0.5$

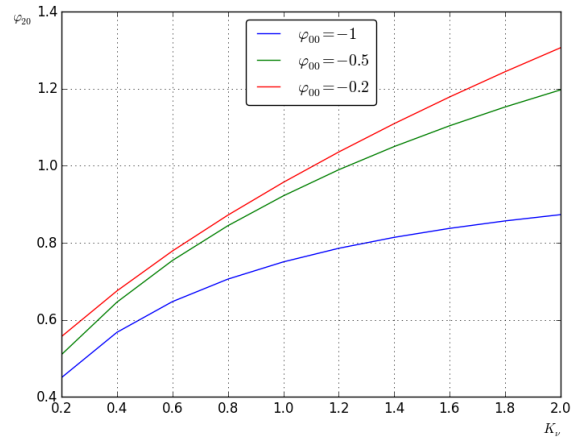


Рисунок 4.2 - $k_\mu = 0.5$

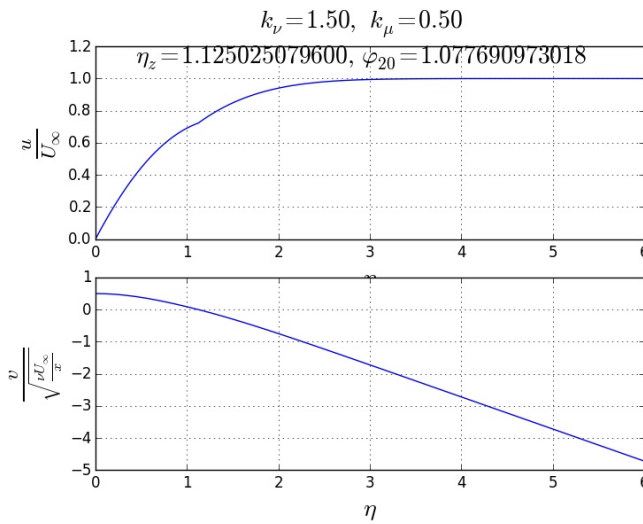


Рисунок 4.3 - $\varphi_{00} = -0.2$

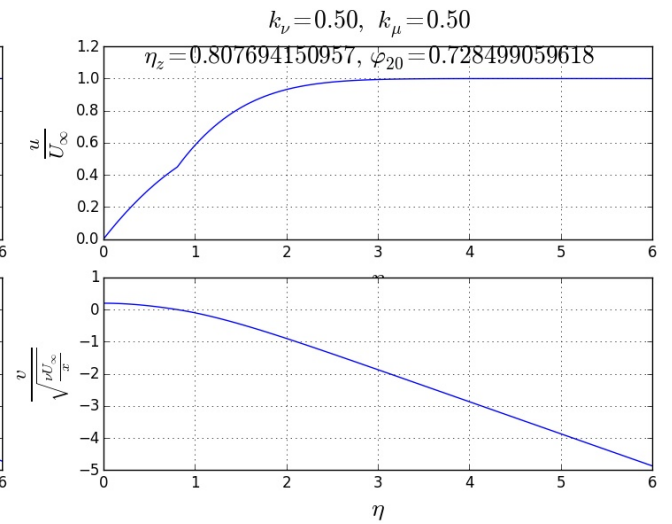


Рисунок 4.4 - $\varphi_{00} = -0.2$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была решена задача о пограничном слое вблизи передней критической точки пронизаемого тела при вдуве жидкости через поверхность тела. Из рисунков 4.1–4.2 видно, что чем больше φ_{00} – скорость вдува жидкости через поверхность тела, тем больше толщина внутреннего слоя. Так же замечаем, что с увеличением k_μ и/или k_ν , толщина пограничного слоя уменьшается. φ_{20} – растёт, если увеличивается φ_{00} , k_μ , k_ν .

На рисунках 4.3–4.4 на верхнем графике на границе раздела пограничных слоёв продольная составляющая скорости имеет излом, потому что жидкости во внешнем и внутреннем слое имеют различные физические параметры. Угол излома в продольной составляющей на границе раздела слоёв $k_\mu < 1$ составляет меньше 180 градусов, если $k_\mu = 1$ угол 180 градусов, а если $k_\mu > 1$ – больше 180 градусов.

График, характеризующий изменение поперечной составляющей скорости, демонстрирует монотонное поведение: он убывает от некоторого положительного значения, соответствующую скорости вдува жидкости через поверхность тела. При $\eta = \eta^*$ график пересекает ось абсцисс, что соответствует условию несмешивания жидкостей. Из графика видно, что частицы жидкости во внешнем и внутреннем слоях движутся к границе раздела.

Качественное поведение поперечной составляющей скорости при различных значениях параметров в задачи не меняется.