Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений

и прикладной математики

Смешанная задача для волнового уравнения с периодическими краевыми условиями

АВТОРЕФЕРАТ

БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Фролова Александра Юрьевича

Научный руководитель

Д. ф.-м. н. профессор _______________ А. П. Хромов

Зав.кафедрой

Д. ф.-м. н. профессор _______________ А.П.Хромов

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз. В.А.Стеклов, впервые давший строгое обоснование метода Фурье, придерживался этой точки зрения. Эта точка зрения сделала метод Фурье очень популярным, было проведено большое количество исследований и достигнуты значительные успехи. Недостатком такого подхода является то, что он требует завышенной гладкости начальных данных. Выход их этого положения намечен А.Н. Крыловым в его исследованиях по ускорению сходимости рядов Фурье и им подобных. Суть его приема состоит в том, что изучаемый вопрос о дифференцировании ряда решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется, а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать. Им были успешно преодолены трудности, связанные с невозможностью почленного дифференцирования на ряде конкретных прикладных задач. В.А.Чернятин приемом А.Н. Крылова с применением асимптотик для собственных значений и собственных функций успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, а в ряде случаев эти условия стали минимально возможными. Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А.Н. Крылова, В.А.Чернятина, есть качественно новый шаг, позволяющий с исчерпывающей полнотой исследовать смешанные задачи методом Фурье и ставящий много важных вопросов и в теории функций.

Цель работы: развить метод А.Н.Крылова и В.А.Чернятина путем привлечения метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье. В результате получить классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения при минимальных условиях на исходные данные, не используя при этом уточненных асимптотик для собственных значений и никакой информации о собственных функциях. Достижение поставленной цели потребовало решения следующих задач:

- Исследовать смешанную задачу для волнового уравнения с периодическими краевыми условий при минимальных требованиях гладкости начальных данных.
- Разработать подход, основанный на методе контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного соответствующей спектральной задачей.
- Получить классическое решение, не используя при этом уточненные асимптотики для собственных значений и какую-либо информацию о собственных функциях.

Бакалаврская работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованных источников.

В введении дается общая характеристика работы: актуальность, цель, задачи.

В первой главе описывается преобразование формального решения.

Во второй главе рассматривается спектральная задача.

В третьей главе приводятся вспомогательные утверждения.

В четвертой главе проводится исследование формального решения.

В пятой получаем классическое решение рассматриваемой задачи.

В заключении приводятся результаты проделанной работы.

1. Преобразование формального решения

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \qquad (1)$$

$$u(0,t) = u(1,t), \qquad u_x(0,t) = u_x(1,t), \qquad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t'(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty) \qquad (3)$$

Где $q(x) \in C[0,1]$ - комплекснозначная функция. Естественно минимальные требования для классического решения следующие:

$$\varphi(x) \in C^2[0,1], \quad \varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1). \quad (4)$$

Кроме того, в силу дифференциального уравнения (1) имеем

$$\varphi''(0) - \varphi''(1) - (q(0) - q(1))\varphi(0) = 0. \qquad (5)$$

По методу Фурье с задачей (1)-(3) связывается спектральная задача для оператора L:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1). \quad (6)$$

Теорема 1. Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые, и для них имеют место асимптотические формулы:

$$\lambda_n = \rho_n^2, \quad \rho_n = \pi n + O(1/n), \quad n = n_0, n_0 + 1, \ldots \ .$$

Пусть $\gamma_n = \{\rho \| \rho - 2\pi n| = \delta\}, \delta > 0$ и достаточно мало, а $n \ge n_0$ и n_0 таково, что при всех $n \ge n_0$ внутрь и на границу γ_n попадает лишь по одному из ρ_n. Пусть $\tilde{\gamma}_n$- образ γ_n в λ-плоскости $(\lambda = \rho^2, \quad \operatorname{Re}\rho \ge 0)$. Обозначим через R_λ резольвенту оператора L, т.е. $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E-единичный оператор, λ-спектральный параметр. Формальное решение задачи (1)-(3) представимо в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda - \sum_{n \ge n_0} (\varphi, \psi_n) \varphi_n(x) \cos \rho_n t, \ (7)$$

Где $r > 0$ фиксировано и взято таким, что все собственные значения, меньше по модулю r, имеют номера, меньше n_0 , на контуре $|\lambda_n| = r$ нет собственных значений, $\varphi_n(x)$ - собственная функция оператора L для собственного значения λ_n , система $\{\psi_n(x)\}$ биортогональна системе $\{\varphi_n(x)\}$.

Представим (7) в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\ge n_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_n}(R_\lambda\varphi))\cos\rho t d\lambda \quad (8)$$

Проведем дальнейшее его преобразование.

Лемма 1. Пусть μ_0 не является собственным значением оператора L и таково, что $|\mu_0| > r$ и μ_0 не находится внутри и на границе $\tilde{\gamma}_n$ ни при каком $n \ge n_0$. Тогда

$$\int_{\tilde{\gamma}_m}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda = \int_{\tilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g)\cos\rho t d\lambda, \quad (9)$$

где $g = (L-\mu_0 E)\varphi.$

Теорема 2. Для формального решения $u(x,t)$ имеет место формула

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\frac{R_\lambda^0 g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\ge n_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_n}\frac{R_\lambda^0 g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda-\mu_0}\left[R_\lambda g - R_\lambda^0 g\right]\cos\rho t d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\sum_{n\ge n_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}\left[R_\lambda g - R_\lambda^0 g\right]\cos\rho t d\lambda,$$

$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора L_0, который есть оператор L при $q(x) \equiv 0$

Лемма 2. Имеет место соотношение $R_\lambda^0 = \varphi_1 + (\lambda-\mu_0)R_\lambda^0\varphi_1,$ где $\varphi_1 = R_\lambda^0 g.$

Лемма 3. Имеет место формула

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\left(R_\lambda^0\varphi_1\right)\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\ge n_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_n}\left(R_\lambda^0\varphi_1\right)\cos\rho t d\lambda, \quad (10)$$

Для дальнейшего потребуется точная формула для резольвенты R_λ

2. Спектральная задача

Теорема 3. Для резольвенты R_λ оператора L имеет место формула

$$R_\lambda f = -\frac{z_1(x,\rho)}{\Delta(\rho)}\begin{vmatrix} U_1(M_\rho f) & u_{12}(\rho) \\ U_2(M_\rho f) & u_{22}(\rho)\end{vmatrix} - \frac{z_2(x,\rho)}{\Delta(\rho)}\begin{vmatrix} u_{11}(\rho) & U_1(M_\rho f) \\ u_{21}(\rho) & U_2(M_\rho f)\end{vmatrix} + (M_\rho f)(x), \quad (11)$$

где

$$U_1(y) = y(0) - y(1), U_2(y) = y'(0) - y'(1), u_{ij}(\rho) = U_i(z_j), \Delta(\rho) = \det(u_{ij}(\rho))_{i,j=1}^2, \lambda = \rho^2, \operatorname{Re}\rho \ge 0.$$

Утверждение теоремы следует из $y(x) = c_1 z_1(x,\rho) + c_2 z_2(x,\rho) + (M_\rho f)(x)$, если определитель c_1 и c_2 из условий $U_j(y) = 0, \quad j = 1,2.$ Следствие. Имеет место формула

$$R_\lambda f = w_1(x,\rho)(f, z_1) + w_2(x,\rho)(f, z_2) + (M_\rho f)(x), \quad (12)$$

где

$$w_1(x,\rho) = \frac{z_1(x,\rho)v_{11}(\rho) + z_2(x,\rho)v_{21}(\rho)}{\Delta(\rho)}, \quad w_2(x,\rho) = \frac{z_1(x,\rho)v_{12}(\rho) + z_2(x,\rho)v_{22}(\rho)}{\Delta(\rho)},$$

$$v_{11}(\rho) = -u_{12}(\rho)z_2'(1,\rho) + u_{22}(\rho)z_2(1,\rho), \quad v_{12}(\rho) = -u_{22}(\rho)z_1(1,\rho) + u_{12}(\rho)z_1'(1,\rho),$$

$$v_{21}(\rho) = -u_{21}(\rho)z_2(1,\rho) + u_{11}(\rho)z_2'(1,\rho), \quad v_{22}(\rho) = -u_{11}(\rho)z_1'(1,\rho) + u_{21}(\rho)z_1(1,\rho).$$

Формула (12) следует из (11), если воспользоваться явным видом $M_\rho f$.

Комплексное число λ является собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда ρ является нулем функции $\Delta(\rho)$. Нам потребуется также формула

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + \int_0^x K_1(x,t)\cos\rho t\,dt, \quad (13)$$

Где $K_1(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t, аналогична формуле

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int_0^x K(x,t)\frac{\sin\rho t}{\rho}dt, \quad (14).$$

Из (13) и (14) следует, что нули функции $\Delta(\rho)$, достаточно большие по модулю, находятся в полосе $|\operatorname{Im}\rho| \le h$, где $h > 0$ - любое фиксированное число.

Далее, из (13) и (14) следует, что для $\Delta(\rho)$ в полосе $|\mathrm{Im}\,\rho| \le h$ имеет место асимптотическая формула:

$$\Delta(\rho) = 2(1-\cos\rho) + O(1/\rho).$$

Отсюда следует

Теорема 4. Нули ρ_n функции $\Delta(\rho)$, достаточно большие по модулю, образуют две серии с асимптотикой $\rho'_n = 2\pi n + \varepsilon'_n,\ p''_n = 2\pi n + \varepsilon''_n (n = n_0, n_0 + 1, \ldots)$, где ε'_n и ε''_n стремятся к нулю при $n \to \infty$. В случае $\varepsilon'_n = \varepsilon''_n$ они простые, а в случае $\varepsilon'_n = \varepsilon''_n$ они двукратные.

3. Вспомогательные утверждения

Обозначим через $\gamma_n = \{\rho \| \rho - 2\pi n| = \delta\}, \delta > 0.$

Теорема 5. В полосе $|\operatorname{Im}\rho| \le h$ (h > 0 и любое) имеют место асимптотические формулы

$$z_1(x,\rho) = \cos\rho x + O(1/\rho), \quad z_1'(x,\rho) = -\rho\sin\rho x + O(1),$$

$$z_2(x,\rho) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + O(1/\rho^2), \quad z_2'(x,\rho) = \cos\rho x + O(1/\rho),$$

Где оценки $O(\ldots)$ равномерны по $x \in [0,1]$.

Из теоремы 5 следует

Лемма 4. При $\rho \in \gamma_n$ имеют место асимптотические формулы

$$z_1^{(j)}(x,\rho) = z_1^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-1}), \quad z_2^{(j)}(x,\rho) = z_2^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-2}),$$

где $j = 0,1,2,$ $z_k^{(j)}(x,p)$ есть j-я производная по x функции

$$z_k(x,\rho), z_1^0(x,\rho) = \cos\rho x, z_2^0(x,\rho) = \sin\rho x/\rho.$$

Пусть $\Delta_0(\rho) = \left(u_{ij}^0(\rho)\right)_1^2$, где $u_{ij}^0(\rho) = U_i(z_j^0).$

Лемма 5. При $\rho \in \gamma_n$ имеют место формула

$$\frac{1}{\Delta(\rho)} = \frac{1}{\Delta_0(\rho)} + O\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (15)$$

Лемма 6. . При $\rho \in \gamma_n$ имеют место формулы

$$(g, z_1) = (g_3(\xi)\cos\mu\xi, \cos 2\pi n\xi) - (g_3(\xi)\sin\mu\xi, \sin 2\pi n\xi), \quad (16)$$

$$\left(g, z_1 - z_1^0\right) = \frac{1}{2\pi n + \mu}[(g_{43}(\xi)\cos\mu\xi, \sin 2\pi n\xi) + (g_4(\xi)\sin\mu\xi, \cos 2\pi n\xi)], \quad (17)$$

где

$$g_3(\xi) = g(\xi) + \int_\xi^1 K_1(\tau,\xi)g(\tau)d\tau, \quad g_4(\xi) = g(\xi)K_1(\xi,\xi) - \int_\xi^1 K_{1\xi}'(\tau,\xi)g(\tau)d\tau, \quad g(\xi) \in C[0,1].$$

Лемма 7. При $\rho \in \gamma_n$ имеют место формулы

$$(g, z_2) = \frac{1}{2\pi n + \mu}[(g_5(\xi)\cos\mu\xi\sin 2\pi n\xi) + g_5(\xi)\sin\mu\xi\cos 2\pi n\xi)], \quad (18)$$

$$\left(g, z_2 - z_2^0\right) = \frac{1}{(2\pi n + \mu)^2}[g_6(\xi)\cos\mu\xi\sin 2\pi n\xi) - g_6(\xi)\sin\mu\xi\cos 2\pi n\xi)], \quad (19)$$

где

$$g_5(\xi) = g(\xi) + \int_\xi^1 K(\tau,\xi)g(\tau)d\tau, \quad g_6(\xi) = -g(\xi)K(\xi,\xi) + \int_\xi^1 K'_\xi(\tau,\xi)g(\tau)d\tau, \quad g(\xi) \in C[0,1].$$

Лемма 8. При $\rho \in \gamma_n$ справедлива оценка:

$$R_\lambda f = O\left(\rho^{-1}\|f\|_1\right), \quad (20)$$

где $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,$ и оценка $O(\ldots)$ равномерна по $x \in [0,1].$

Лемма 9. При $\rho \in \gamma_n$ имеют место асимптотические формулы

$$w_{1,x^j}^{(j)}(x,\rho) = w_{1,x^j}^{0(j)}(x,\rho) + O(n^{j-2}), \quad w_{2,x^j}^{(j)}(x,\rho) = w_{2,x^j}^{0(j)}(x,\rho) + O(n^{j-1}),$$

где $j = 0,1,2, w_k^0(x,\rho)$ есть $w_k(x,\rho)$ для случая оператора L_0 (т.е. оператора L при $q(x) \equiv 0$). Оценки $O(\ldots)$ равномерны по $x \in [0,1]$ и μ где $\mu = \rho - 2\pi n.$

4. Исследование формального решения

По методу Фурье формальное решение задачи (1)-(3) имеет вид $u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda - \sum\limits_{n\ge n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}(R_\lambda\varphi))\cos\rho t d\lambda$, R_λ есть резольвента оператора L, определяемого в (6), и $\tilde{\gamma}_n$ есть образ в λ-плоскости окружности $\gamma_n = \{\rho \| \rho - 2\pi n| = \delta\}$. Для формального решения сохраняется формула

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{R_\lambda g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\ge n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{R_\lambda g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda$$

и представление $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t)$.

Лемма 10. Формальное решение сходится абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$ и всех $t\in[-T,T]$, где $T>0$ –любое фиксированное число.

Это утверждение следует из формулы

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{R_\lambda g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\ge n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{R_\lambda g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda \quad (21)$$

и леммы 8. Лемма 3 сохраняет свою формулировку, т.е.

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(R_\lambda^0\varphi_1\right)\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\ge n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\left(R_\lambda^0\varphi_1\right)\cos\rho t d\lambda, \quad (22)$$

Оператор L_0 есть оператор (6) при $q(x)\equiv 0$.Оператор L_0 самосопряженный, его собственные значения $\lambda_n^0 = 4\pi^2 n^2$, $n = 0,1,\ldots$.Все собственные значения λ_n^0 при $n\ge 1$ двукратны. Собственному значению $\lambda_n^0 = 0$ соответствует собственная функция $\varphi_0(x) = 1$, собственному значению λ_n^0 при $n\ge 1$ соответствуют две собственные функции $\sqrt{2}\sin 2\pi nx$ и $\sqrt{2}\cos 2\pi nx$, т.е. система собственных функций есть обычная тригонометрическая система. По теореме вычетов из (22) получаем

$$u_0(x,t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\varphi_1(\xi),\cos 2\pi n\xi)\cos 2\pi nx + (\varphi_1(\xi),\sin 2\pi n\xi)\sin 2\pi nx\right]\cos 2\pi nt, \quad (23)$$

где $\varphi_1 = R_{\mu_0}^0 g = R_{\mu_0}^0(L-\mu_0 E)\varphi$. Из (23) получаем

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}_1(x+t) + \tilde{\varphi}_1(x-t)],$$

где

$$\tilde{\varphi}_1(\tau) = (\varphi_1, 1) + 2\sum_{n+1}^{\infty}\left[\left(\varphi_1(\xi), \cos 2\pi n\xi\right)\cos 2\pi n\tau + \left(\varphi_1(\xi), \sin 2\pi n\xi\right)\sin 2\pi n\tau\right].$$

Таким образом, $\tilde{\varphi}_1(\tau) \in C(-\infty, \infty), \tilde{\varphi}_1(\tau) = \tilde{\varphi}_1(1+\tau), \tilde{\varphi}_1(\tau) = \varphi_1(\tau)$ при $\tau \in [0,1]$. Из условий (4), (5) получаем, что $\tilde{\varphi}_1(\tau) \in C^2(-\infty, \infty)$. Тем самым, получена

Теорема 6. Функция $u_0(x,t)$ из (23) есть классическое решение смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(1,t), \quad u_x(0,t) = u_x(1,t),$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_t'(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Лемма 11. Обозначим через $\psi(x)$ функции cos$x$ или sin$x$. Пусть $f(x) \in L_\infty[0,1]$ и $f(x,\mu) = f(x)\psi(\mu x),\ \mu \in \gamma_n,\ \beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \psi(\pi n x)).$ Тогда верна оценка

$$\sum_{n=n_0}^{n_2} \frac{1}{n}\left|\beta_n(\mu)\right| \le c\sqrt{\sum_{n=n_0}^{n_2} \frac{1}{n^2}}, \quad (24)$$

Где $c > 0$ и не зависит от $n_1,\ n_2$ и $\mu \in \gamma_0$.

Лемма 12. Пусть $\psi(x)$ и $f(x)$ те же, что и в лемме 8, $\beta_n(\mu) = \left(f(x,\mu), \psi(2\pi n x)\right).$ Тогда имеет место оценка (24).

Положим

$$b_n(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0}\left[w_1(x,\rho)(g,z_1) + w_2(x,\rho)(g,z_2) - w_1^0(x,\rho)(g,z_1^0) - w_2^0(x,\rho)(g,z_2^0)\right]\cos\rho t d\lambda.$$

Лемма 13. Ряды

$$\sum b_{n,x^j}^{(j)}(x,t), \quad \sum b_{n,t^j}^{(j)}(x,t), \quad j = 0,1,2,$$

Сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-T, T],$ при любом фиксированном $T > 0$.

5. Классическое решение задачи

Теорема 6. Формальное решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3) дает классическое решение при условиях (4), (5).

Для формального решения

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\ge n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda$$

В силу формулы и следствия теоремы 3 имеем следующее представление:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{(R_\lambda g)}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\ge n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{w_1(x,\rho)(g,z_1)+w_2(x,\rho)(g,z_2)}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda. \quad (25)$$

Отсюда в силу оценок $w^{(j)}_{1,x^j}(x,\rho) = O(n^{j-1}), w^{(j)}_{2,x^j}(x,\rho) = O(n^j)$, легко следующих из леммы 9, по леммам 6, 7 и 12 получаем, что ряд (25) и ряды, образованные из него почленным дифференцированием один раз по x и t, сходится абсолютно и равномерно. Таким образом, в этом случае процедура ускорения сходимости рядов не требуется. Поэтому $u(x,t)$ удовлетворяет начальным и граничным условиям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе привел дальнейшее развитие метода А.Н.Крылова и В.А.Чернятина путем привлечения метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье. В результате удалось получить классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения при минимальных условиях на исходные данные, не используя при этом уточненных асимптотик для собственных значений и никакой информации о собственных функциях.