Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ " САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

Смешанные задачи для интегрируемых нелинейных уравнений

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета

Белоусовой Ольги Валерьевны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель к.ф-м.н., доцент		М. Ю. Игнатьев
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия
Зав. кафедрой д.ф-м.н., профессор		В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. Дифференциальные уравнения в частных производных представляют собой весьма широкий класс математических моделей, описывающих физические явления. Среди всех дифференциальных уравнений в частных производных выделяют класс интегрируемых. Для интегрируемых нелинейных уравнений краевые и смешанные задачи играют существенную роль в математической физике при создании естественной модели волновых процессов на полуограниченном пространстве, развивающихся под влиянием граничных условий.

В настоящее время в силу развития теории начальных и смешанных задач для дифференциальных уравнений в частных производных и их прикладной важности в математическом моделировании многих процессов, происходящих в реальном мире, изучение и рассмотрение начальных, смешанных и краевых задач для интегрируемых нелинейных уравнений является актуальным.

Существуют различные и подходы к интегрируемости дифференциальных уравнений в частных производных. Одним из таких методов является метод обратной задачи рассеяния.

При исследовании краевых и смешанных задач с общими граничными условиями для нелинейных уравнений, было получено, что в методе появляется шаг с решением некоторой нелинейной задачей. Поэтому смешанные задачи с интегрируемыми граничными условиями по-прежнему играют особую роль. В частности, для таких задач в методе их решения был исключен шаг, на котором требовалось найти решение некоторой нетривиальной нелинейной задачи.

Несмотря на то, что для каждого особого интегрируемого дифференциального уравнения в частных производных природа интегрируемости граничных условий, как правило, известна, некоторые технические аспекты метода требуют каждую конкретную интегрируемую краевую задачу рассматривать отдельно.

Цель данной работы состоит в том, чтобы рассмотреть метод обратной задачи рассеяния для задачи Коши, соответствующей некоторому классу интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных, и продемонстрировать применения данного метода на некоторый класс краевых задач для некоторого класса интегрируемых нелинейных уравнений.

В работе будем рассматривать множество дифференциальных уравнений в частных производных, связанных методом обратной задачи рассеяния с классической спектральной задачей Штурма-Лиувилля, и покажем связь обратных задач с вопросами разрешимости начальной задачи Коши для уравнения Кортевега-да Фриза. Будем исследовать краевую задачу с интегрируемыми граничными условиями для общего уравнения Кортевега-де Фриза, т.е. обобщим метод обратной задачи рассеяния для иерархии уравнения Кортевега-де Фриза.

Данная магистерская работа состоит из введения, двух разделов, заключения и списка литературы. Первый раздел включает три подраздела, в нем рассматривается начальная задача для интегрируемых нелинейных уравнений, приводятся некоторые предварительные рассуждения, показывается эквивалентность представления Лакса уравнению Кортевега-де Фриза, исследуются интегралы движения и описывается вывод общего уравнения Кортевега-де Фриза. В последнем подразделе изучается метод обратной задачи рассеяния. Второй раздел включает в себя три подраздела, в нем рассматривается смешанная задача для интегрируемых нелинейных уравнений, приводятся некоторые предварительные сведения и постановка рассматриваемой задачи. В третьем подразделе содержится основной результат дипломной работы, в нем обобщается метод обратный задачи и применяется к некоторому классу смешанных задач для интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных.

Основное содержание работы. Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля

$$L_0 y = -y'' + u_0(x)y = \lambda y \tag{1}$$

с гладкой периодической (периода π) функцией $u_0(x)$. Обозначим через $\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \ldots$ – спектр уравнения (1) при периодических граничных условиях и через $\mu_1 \leq \mu_2 < \mu_3 \leq \mu_4 < \ldots$ – спектр при антипериодических граничных условиях. Далее, обозначим через $u(x,t)$ решение уравнения Кортевега-де Фриза (или любого из высших его аналогов) с начальными условиями $u(x,0) = u_0(x)$.

Спектр оператора $L(t)$ при периодических (антипериодических) граничных условиях не зависит от t и совпадает с соответствующим спектром оператора L_0. Следовательно, собственные значения периодической (антипериодической) задачи суть интегралы движения, порожденного в пространстве гладких периодических функций любым из уравнений Кортевега-де Фриза. Покажем, что в случае бесконечной дифференцируемости функции $u_0(x)$ существует бесконечное множество интегралов движения вида $(a = \pi)$

$$J_n = \int\limits_0^{\pi} P_n(u)dx,\ n = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

где $P_n(u)$ – полиному относительно u и ее производных по x.

Вообще, сам факт существования интегралов движения вида (2) просто следует из предыдущего. В самом деле, хорошо известны асимптотические формулы

$$\lambda_n = n^2 + c_0 + \frac{c_1}{n^2} + \frac{c_2}{n^4} + ..., \tag{3}$$

где коэффициенты $c_0, c_1, c_2, ...$ имеют вид (2). Так как λ_n суть интегралы движения, то коэффициенты асимптотического разложения (3) также должны быть таковыми.

Покажем существование интегралов движения вида (2) и при этом получим рекуррентные формулы для многочленов $P_n(u)$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - u_0(x)z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \tag{4}$$

$$z|_{t=0} = f(x),\ \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{5}$$

$$z(x + \pi, t) = z(x, t), \tag{6}$$

где $f(x)$ – гладкая периодическая (периода π) функция. Решая эту задачу методом Фурье, получим

$$z(x,t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda_\nu} t \varphi_\nu(x) \int\limits_0^{\pi} f(s)\varphi_\nu(s)ds, \tag{7}$$

где $\varphi_\nu(x)$ – собственные функции уравнения (1) при периодических граничных условиях.

С другой стороны, задачу (4)-(5) можно решить по методу Римана. Решение имеет вид

$$z(x,t)=\frac{1}{2}\big[f(x+t)+f(x-t)\big]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}w(x,t,s)f(s)ds, \tag{8}$$

где $w(x,t,s)$ – функция Римана. Покажем, что в случае, когда $u_0(x)$ и $f(x)$ – периодические функции, решение (8) задачи (4)-(5) удовлетворяет также условию (6). В самом деле, функция $z(x+\pi,t)$ в силу периодичности $u_0(x)$ и $f(x)$ удовлетворяет как уравнению (4), так и начальным условиям (5).

Из единственности решения задачи (4)-(5)-(6) следует тождество

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda_\nu}t\varphi_\nu(x)\int\limits_0^{\pi}f(s)\varphi_\nu(s)ds=\frac{1}{2}\big[f(x+t)+f(x-t)\big]+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}w(x,t,s)f(s)ds. \tag{9}$$

Обозначим через $g(t)$ произвольную финитную, гладкую, четную функцию. Пусть supp$g(t)\subset(-\epsilon,\epsilon)$. Положим $\psi(\mu)=\int\limits_0^{\epsilon}g(t)\cos\mu t dt$. Умножим обе части тождества (9) на $g(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до ϵ. Сделаем некоторые преобразования, замены, получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi(\sqrt{\lambda_\nu})\varphi_\nu^2(x)=\frac{1}{2}g(0)+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\epsilon}w(x,t,x)g(t)dt. \tag{10}$$

Интегрируя по x, получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi(\sqrt{\lambda_\nu})=\frac{\pi}{2}g(0)+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\epsilon}g(t)\Big[\int\limits_0^{\pi}w(x,t,x)dx\Big]dt.$$

Левая часть последнего тождества есть интеграл движения, поэтому и правая часть является интегралом движения. А так как $g(t)$ является произвольной функцией, то интегралом движения является (при каждом фиксированном t)

величина $\int\limits_0^\pi w(x,t,x)dx$. В силу асимптотического разложения

$$w(x,t,s) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} t^{2k+1}(s-x)^l A_{k,l}(q),$$

где $A_{k,l}(q)$ – полиномы относительно функции $q(x)$ и ее производных, интегралами движения являются

$$J_k = \int\limits_0^\pi A_{2k+1,0}(u)dx.$$

Далее выведем рекуррентную формулу для полиномов $A_{2k+1,0}(u)$.

Лемма 1. *Пусть* $L = -D^2 + u(x),\ H = -\frac{1}{2}D^3 + 2uD + u'$, *где* $D = d/dx$. *Если* $L\varphi = \lambda\varphi$, *то*

$$H(\varphi^2) = 2\lambda(\varphi^2)'. \tag{11}$$

Доказательство. Если к обеим частям тождества (10) применить оператор H и использовать равенство (11), то получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\Bigg[\int\limits_0^\epsilon g''(t)\cos\sqrt{\lambda_\nu}t dt\Bigg](\varphi_\nu^2(x))' =$$

$$= -\frac{1}{4}g(0)u'(x) - \frac{1}{4}\int\limits_0^\epsilon H_x\big[w(x,t,x)\big]g(t)dt. \tag{12}$$

Заменяя в тождестве (10) $g(t)$ на $g''(t)$ и дифференцируя по x, получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\Bigg[\int\limits_0^\epsilon g''(t)\cos\sqrt{\lambda_\nu}t dt\Bigg](\varphi_\nu^2(x))' = \frac{1}{2}g(0)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}w(x,t,x)\big|_{t=0} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}\big[w(x,t,x)\big]g(t)dt. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует тождество

$$g(0)u'(x) + \int\limits_0^{\epsilon} H_x\big[w(x,t,x)\big]g(t)dt =$$

$$= -2g(0)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\big[w(x,t,x)\big]\big|_{t=0} - 2\int\limits_0^{\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}\big[w(x,t,x)\big]g(t)dt.$$

Из последнего тождества, в силу произвольности функции $g(t)$, следует:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\big[w(x,t,x)\big]\big|_{t=0} = -\frac{1}{2}u'(x) \tag{14}$$

$$H_x\big[w(x,t,x)\big] = -2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x}\big[w(x,t,x)\big]. \tag{15}$$

Сравнивая в (15) коэффициенты при одинаковых степенях t, получим

$$H_x A_{2k+1,0}(u) = -2(2k+3)(2k+1)A'_{2k+3,0}(u),\ k = 0,1,2... \tag{16}$$

Обозначим $A_0(u) = -1/2$, $A_k(u) = A_{2k-1,0}(u)$, тогда перепишем

$$HA_0 = -\frac{1}{2}u'(x) = A'_1(u), \tag{17}$$

а из тождества (16) следует

$$H_x A_k = -2(2k+1)2kA'_k,\ k = 1,2,.... \tag{18}$$

Теперь введем в рассмотрение вместо полиномов A_k полиномы P_k, положив

$$P_0 = A_0 = -\frac{1}{2},$$

$$P_1 = A_1 = -\frac{1}{2}u(x),$$

$$P_k = \alpha_k A_k,\ k \geq 2,$$

и подберем постоянные числа α_k так, чтобы вместо тождества (18) выполнялось тождество

$$H_x P_k = P'_{k+1},\ k = 1,2,.... \tag{19}$$

Для $k = 0$ тождество (19) при $\alpha_1 = 1$ совпадает с тождеством (17).

Для $k \geq 1$ имеем, в силу (18):

$$H_x P_k = H_x(\alpha_k A_k) = \alpha_k H_x A_k = -2\alpha_k(2k+1)2kA'_{k+1} =$$

$$= -2\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}(2k+1)2kP'_{k+1}.$$

Поэтому числа α_k должны удовлетворять уравнению

$$-2\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}(2k+1)2k = 1$$

или

$$\alpha_{k+1} = -2(2k+1)2k\alpha_k,\ k = 1, 2, ...$$

Так как $\alpha_1 = 1$, то $\alpha_2 = -12,\ \alpha_3 = 480$ и т.д.

Лемма 2. *Оператор*

$$B_q = \sum_{k=0}^{q} \left(\frac{1}{2}P'_k - P_k\frac{d}{dx}\right)(2L)^{q-k}, \tag{20}$$

где $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ *и полиномы* P_k *(от* u *и производных* u *по* x*), определенные ранее, удовлетворяют соотношению Лакса*

$$[B_q, L] = B_q L - L B_q = -P'_{q+1}.$$

Обозначим через $c_0, c_1, ..., c_p$ произвольные действительные числа и введем обозначения:

$$X_q = -P'_{q+1},\ \mathfrak{B}_p = \sum_{q=0}^{p} c_q B_q,\ Z_p = \sum_{q=0}^{p} c_q X_q. \tag{21}$$

Тогда очевидно

$$[\mathfrak{B}_p, L] = Z_p. \tag{22}$$

Общим уравнением Кортевега-де Фриза называется уравнение вида

$$\dot{u} = Z_p(u). \tag{23}$$

Подставляя (20) в (21) получим, изменив порядок суммирования:

$$\mathfrak{B}_p = \sum_{j=0}^{p} \left(\frac{1}{2} P_j' - P_j \frac{d}{dx} \right) \sum_{k=j}^{p} c_k (2L)^{k-j}. \tag{24}$$

Обозначим через $u_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ гладкую, достаточно быстро убывающую на бесконечности функцию и через $u(x,t)$ – решение уравнения (23) с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{25}$$

Предположим, что решение этой задачи Коши существует и при каждом фиксированном t на бесконечности убывает. Оба эти утверждения могут быть доказаны с помощью априорных оценок, которые могут быть получены с помощью интегралов движения. Рассмотрим теперь в пространстве $L^2(-\infty,\infty)$ однопараметрическое семейство операторов Штурма-Лиувилля

$$L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t), \tag{26}$$

где $u(x,t)$ есть решение задачи (23)-(25).

Найдем эволюцию во времени, в силу общего уравнения Кортевега-де Фриза, данных рассеяния для оператора (26). Обозначим через $f(x,k,t)$ и $g(x,k,t)$ решение Йоста для уравнения

$$L(t)y = k^2 y \tag{27}$$

с асимптотиками

$$f(x,k,t)\big|_{x\to+\infty} = e^{ikx} + o(1),$$
$$g(x,k,t)\big|_{x\to-\infty} = e^{-ikx} + o(1).$$

Пусть $\{a(k), b(k); k_1, k_2, ..., k_n; m_1^-, m_2^-, ..., m_n^-\}$ – данные рассеяния для оператора $L(0)$. Полагая в уравнении (27) $y = f(x,k,t)$ и дифференцируя затем по t, получим, используя уравнения (22) и (23):

$$(\mathfrak{B}_p L - L\mathfrak{B}_p) f + (L - k^2)\dot{f} = k^2 \mathfrak{B}_p f - L\mathfrak{B}_p f +$$

$$+(L-k^2)\dot{f} = (L-k^2)(\dot{f} - \mathfrak{B}_p f) = 0.$$

Поэтому $\dot{f} - \mathfrak{B}_p f$ есть решение уравнения (27). Так как из полиномов P_k только $P_0 = -1/2$ не стремится к нулю при $x \to \infty$, то из (24) следует, что при $x \to +\infty$

$$\mathfrak{B}_p f = \frac{1}{2} ik \sum_{l=0}^{p} c_l (2k^2)^l e^{ikx} + o(1). \tag{28}$$

Аналогично доказывается, что при $x \to -\infty$

$$\mathfrak{B}_p g = \frac{1}{2} ik \sum_{l=0}^{p} c_l (2k^2)^l e^{ikx} + o(1). \tag{29}$$

Так как

$$\dot{f}_{|x \to +\infty} = o(1), \tag{30}$$

то из (28) и (30) следует

$$\left[\dot{f} - \mathfrak{B}_p f\right]_{|x \to +\infty} = -\frac{1}{2} ik \sum_{l=0}^{p} c_l (2k^2)^l e^{ikx} + o(1).$$

Но решение уравнения (27) своим асимптотическим поведением на любой из бесконечностей определяется однозначно. Поэтому

$$\dot{f} - \mathfrak{B}_p f = -\frac{1}{2} ik \sum_{l=0}^{p} c_l (2k^2)^l f. \tag{31}$$

Пусть теперь $x \to -\infty$. Так как

$$f(x,k,t) = b(k,t) g(x,k,t) + a(k,t) g(x,-k,t)$$

следует

$$\dot{b}(k,t) g(x,k,t) + b(k,t) \dot{g}(x,k,t) + \dot{a}(k,t) g(x,-k,t) +$$

$$+ a(k,t) \dot{g}(x,-k,t) - b(k,t) \mathfrak{B}_p g(x,k,t) + a(k,t) \mathfrak{B}_p g(x,-k,t) =$$

$$= -\frac{1}{2} ik \sum_{l=0}^{p} c_l (2k^2)^l \left[b(k,t) g(x,k,t) + a(k,t) g(x,-k,t)\right].$$

Сравнивая теперь слева и справа коэффициенты при e^{-ikx} и e^{ikx}, получим, используя асимптотическое равенство (29):

$$\dot{b}(k,t) = -\big[ik \sum_{l=0}^{p} c_l(2k^2)^l\big] b(k,t),$$

$$\dot{a}(k,t) = 0.$$

Поэтому

$$a(k,t) = a(k,0) = a(k), \tag{32}$$

$$b(k,t) = b(k) e^{-ik \sum\limits_{l=0}^{p} c_l(2k^2)^l t}. \tag{33}$$

Найдем теперь эволюцию данных рассеяния дискретного спектра. Собственные значения дискретного спектра не зависят от t. Остается выяснить зависимость от t чисел $m_\nu^\pm$. Функция $\psi_\nu(x,t) = g(x, i\kappa_\nu, t)$ является собственной функцией оператора $L(t)$, соответствующей собственному значению $\lambda_\nu = -\kappa_\nu^2$ с асимптотикой на бесконечности

$$\psi_\nu(x,t)_{|x\to-\infty} = e^{\kappa_\nu t}(1 + o(1)),$$

$$\psi_\nu(x,t)_{|x\to+\infty} = d_\nu(t) e^{-\kappa_\nu x}(1 + o(1)).$$

Если мы определим вид функции $d_\nu(t)$, то сможем найти $m_\nu^-(t)$ и $m_\nu^+(t)$. Аналогично выводу равенства (31), можно показать, что

$$\dot{\psi}_\nu - \mathfrak{B}_p \psi_\nu = \frac{1}{2}\kappa_\nu \sum_{l=0}^{p} c_l(2\lambda_\nu)^l \psi_\nu.$$

Подставляя в это равенство асимптотику решения $\psi_\nu(x,t)$ на $+\infty$ и сравнивая коэффициенты при главных членах, получим для определения $d_\nu(t)$ уравнение

$$d_\nu(t) = \kappa_\nu \sum_{l=0}^{p} c_l(2\lambda_\nu)^l d_\nu(t), \quad \lambda_\nu = -\kappa_\nu^2.$$

Из этого уравнения следует

$$d_\nu(t) = d_\nu(0) e^{\kappa_\nu \sum\limits_{l=0}^{p} c_l(2\lambda_\nu)^l},$$

и получим

$$m_\nu^-(t) = m_\nu^-(0)e^{\kappa_\nu \sum\limits_{l=0}^{p} c_l(2\lambda_\nu)^l t}.$$

Итак, данные рассеяния оператора $L(t)$ выглядят следующим образом:

$$\Big\{a(k), b(k)e^{-ik\sum\limits_{l=0}^{p} c_l(2k^2)^l t},\ \kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n,$$
$$m_\nu^-(t) = m_\nu^-(0)e^{\kappa_\nu \sum\limits_{l=0}^{p} c_l(2\lambda_\nu)^l t},\ \nu = \overline{1,n},\ \lambda_\nu = -\kappa_\nu^2\Big\}. \tag{34}$$

Формулы (34) позволяют указать эффективный метод решения задачи Коши для общего уравнения Кортевега-де Фриза.

Теорема 1. *Пусть задана начальная функция $u_0(x)$ с данными рассеяния $\{a(k), b(k); \kappa$ Определим новые данные рассеяния по формулам* (34) *и по ним построим функцию (потенциал) $q(x,t)$.*

Тогда $q(x,t) \equiv u(x,t)$, где $u(x,t)$ есть решение задачи Коши (23)-(25) *для уравнения Кортевега-де Фриза.*

Таким образом, мы показали, что уравнение Кортевега-де Фриза эквивалентно представлению Лакса $L_t = [B, L]$, для пары операторов B и L и лежит в основе применимости метода обратной задачи рассеяния к высшим аналогам уравнения Кортевега-де Фриза, для которых операторы B и L имеют определенный вид. Получили общее уравнение Кортевега-де Фриза и рассмотрели классический метод обратной задачи рассеяния для решения соответствующей задачи Коши.

Теперь рассмотрим краевую задачу для общего уравнения Кортевега-де Фриза (35)-(36)

$$\dot{q} = \sum_{\nu=0}^{s} C_\nu X_\nu(q), \tag{35}$$

$$b_{2n}(q(\cdot,t)) = 0,\ n = \overline{1, s-1},$$
$$b_{2n-1}(q(\cdot,t)) = a_n,\ n = \overline{1, s+1}. \tag{36}$$

с $(a_1, ..., a_{s+1}) = a(\mu^*) \in \mathcal{A}$ и выберем $\mu^* \in (\mu^-, 0)$.

Согласно некоторым условиям на постоянные коэффициенты и определенному выбору граничных условий можно найти функцию Вейля-Марченко для потенциала $q(x,t)$, из чего будет получен некоторый класс решения краевой задачи.

Теорема 2. *Пусть Q есть произвольная функция из $\overline{B(\mu_*)}$, $\mu_* \in (\mu^*, 0)$. Обозначим через $M(T,\cdot)$ функцию Вейля-Марченко для потенциала $Q_T(t) := Q(t+T)$. Пусть w есть решение следующей задачи Коши*

$$\begin{aligned} \dot{w} + w^2 &= Q(t) - \mu^*, \\ w(0) &= w_0 \end{aligned} \tag{37}$$

с произвольным $w_0 \in (M(0, i\kappa^*),\ M(0, -i\kappa^*))$, $\kappa^* := \sqrt{-\mu^*}$. Обозначим через $g(\lambda)$ многочлен, вида $g_\mu(\lambda) := 4^s \prod\limits_{\nu=1}^{s} (\lambda - c_\nu)$, т.е. $g(\lambda) = g_{\mu^*}(\lambda)$.

Тогда функция $m(t,\cdot)$, определенная как

$$m(t,\rho) := \frac{M(t, \varphi(\rho)) - w(t)}{g(\rho^2)}, \tag{38}$$

есть функция Вейля-Марченко для некоторой функции $q(\cdot, t) \in \tilde{B}$, и функция $q(x,t)$ есть решение краевой задачи (35)-(36) *на каждой полуоси $(-\infty, 0), (0, \infty)$.*

Доказательство. Начнем со следующего замечания. Поскольку $-\kappa^{*2} < -\kappa_*^2$, то значение $-\kappa^{*2}$ не может быть собственным значением Дирихле для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом Q на любой полуоси $(0, \pm\infty)$. Следовательно оба $M(0, i\kappa^*)$, $M(0, -i\kappa^*)$ существуют и конечны. Кроме того, легко показать, что $M(0, i\kappa^*) < M(0, -i\kappa^*)$ (для $q \in B(\mu_*)$, для $q \in \overline{B(\mu_*)}$ можно доказать с помощью метода предельного перехода). Это означает, что интервал $(M(0, i\kappa^*), M(0, -i\kappa^*))$, указанный в условии Теоремы, не пуст.

Аналогично для любого T $-\kappa^{*2}$ не является собственным значением Дирихле для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом Q_T, поэтому $\psi(T, \pm i\kappa^*) \neq 0$ и $M(T, \pm i\kappa^*) = \dot{\psi}(T, \pm i\kappa^*) \backslash \psi(T, \pm i\kappa^*)$ конечны. Теорема сравнения для уравнения Риккати дает оценку

$$M(T, i\kappa^*) < w(T) < M(T, -i\kappa^*),$$

и поскольку $M(T, \pm i\kappa^*)$ конечна для любого T, мы можем сделать заключение, что $w(T)$ корректно определена с помощью формулы (38).

Дальнейшее доказательство Теоремы разделим на несколько частей. Сначала покажем, что функция $m(t,\rho)$ вида (38) является функцией Вейля-Марченко для потенциала $q(\cdot,t)$, удовлетворяющего граничным условиям (36). Далее приведем доказательство, что потенциал $q(\cdot,\cdot)$, соответствующий безотражательному потенциалу Q, удовлетворяет общему уравнению КдФ (35). И в итоге покажем, что потенциал $q(\cdot,t)$, удовлетворяющий граничным условиям (36), есть потенциал $q(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющий общему уравнению КдФ (35).

Лемма 3. *Функция $m(t,\rho)$ из условия Теоремы 2 для любого фиксированного t является функцией Вейля-Марченко для некоторого потенциала $q(\cdot,t)\in\overline{B(-\tau_*^2)}$, где τ_* зависит только от μ_* и μ^*. Кроме того, $q(\cdot,t)$ удовлетворяет граничным условиям* (36).

Лемма 4. *Пусть функция Q из условия Теоремы 2 есть безотражательный потенциал из множества $B(\mu_*)$. Тогда соответствующий потенциал $q(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет общему уравнению Кортевега-де Фриза* (35).

Рассмотрим произвольную функцию
$Q\in\overline{B(\mu_*)}$ и определим функцию $m(t,\cdot)$ по формуле (38)

$$m(t,\cdot):=\frac{M(t,\varphi(\cdot))-w(t)}{g(\cdot)}.$$

Из Леммы 3 следует, что для любого фиксированного t функция $m(t,\cdot)$ является функцией Вейля-Марченко для некоторого потенциала $q(\cdot,t)\in\overline{B(-\tau_*^2)}$, и $q(\cdot,t)$ удовлетворяет граничным условиям (36).

Покажем, что потенциал $q(\cdot,t)$ также удовлетворяет общему уравнению Кортевега-де Фриза (35).

Рассмотрим последовательность $Q_N\in B(\mu_*)$, сходящуюся к Q в топологии пространства $\overline{B(\mu_*)}$ (т.е. в топологии равномерной сходимости функций и всех их производных на любом компакте), такую что соответствующие функции Вейля-Марченко $M_N(0,\rho)$ сходятся к функции Вейля-Марченко $M(0,\rho)$. Такая последовательность существует в силу Утверждения **??**, кроме того, поскольку решения Вейля-Марченко $\psi_N(t,\rho)$ и $\psi(t,\rho)$, где $\rho\in\mathbb{C}\backslash[-i\kappa_*,i\kappa_*]$, не могут обращаться в нуль для любого t, то Замечание **??** гарантирует, что $M_N(t,\rho)=(\psi_N(t,\rho)^{-1}\dot{\psi}_N(t,\rho)$ сходится к $M(t,\rho)=(\psi(t,\rho)^{-1}\dot{\psi}(t,\rho)$ при любом фиксированном t.

Определим
$$m_N(t,\rho) := \frac{M_N(t,\varphi(\rho)) - w_N(t)}{g(\rho^2)},$$
где $w_N(t)$ есть решение следующей задачи Коши:

$$\dot{w}_N + w_N^2 = Q_N(t) - \mu^*,$$

$$w_N(0) = w_0.$$

Так как при достаточно большом N мы имеем $w_0 \in (M_N(0, i\kappa^*), M_N(0, -i\kappa^*))$, то все $w_N(t)$ с достаточно большим N конечны для t и $w_N(t) \to w(t)$ при $N \to \infty$. Таким образом получим

$$m(t,\rho) = \lim_{N\to\infty} m_N(t,\rho), \rho \in \mathbb{C}\ [-i\kappa_*, i\kappa_*]. \tag{39}$$

С другой стороны, в силу Лемм 3, 4 $m_N(t,\rho)$ есть функция Вейля-Марченко для потенциала $q_N(\cdot,t) \in B(-\tau_*^2)$, где q_N удовлетворяет уравнению (35).

Пусть $\mathcal{B}(-\tau_*^2)$ есть множество всех решений уравнения (35), принадлежащих $B(-\tau_*^2)$ для каждого фиксированного t, рассматриваемого с топологией равномерной сходимости функций со всеми их производными на любом компактном множестве $(x,t)-$плоскости. $\mathcal{B}(-\tau_*^2)$ может быть показано как предкомпактное множество.

Итак, существует q^*, такое что некоторая подпоследовательность $q_{N_n}(x,t)$ сходится к $q^*(x,t)$ при $n \to \infty$ вместе со своими производными равномерно на любом компактном множестве $(x,t)-$плоскости. Очевидно, что q^* удовлетворяет уравнению (35). В то же время очевидно, что для любого фиксированного t подпоследовательность $q_{N_n}(\cdot,t) \to q^*(\cdot,t)$ в топологии $\overline{B(-\tau_*^2)}$. Это означает, что $q^*(\cdot,t) \in \overline{B(-\tau_*^2)}$ для каждого фиксированного t.

Для каждого фиксированного t существует подпоследовательность $n(k)$, такая что соответствующие функции Вейля-Марченко $m^*(t,\rho) = \lim\limits_{k\to\infty} m_{N_{n(k)}}(t,\rho)$. Вместе с пределом (39) это дает тождество $m^*(t,\rho) \equiv m(t,\rho)$, следовательно и $q^*(x,t) \equiv q(x,t)$. Теорема доказана.

Замечание 1. *Из Лемм 3, 4 следует, что алгоритм, изложенный в Теореме 2 позволяет, в частности, построить солитоные решения для краевой задачи*

(35)-(36)*: достаточно выбрать функцию Q из собственного класса безотражательных потенциалов. Аналогичным образом с помощью той же процедуры можно построить решения для конечнозонных потенциалов, лежащих на интервале* $(\mu_*, 0)$*, и положить* $w_0 = M(0, -i\kappa^*)$ *или* $w_0 = M(0, i\kappa^*)$ *(нетрудно показать, что и в этом случае условие Теоремы 2 остается верным).*

Заключение. В ходе выполнения дипломной работы были изучены материалы в теории рассеяния и обратных задач для интегрируемых нелинейных уравнений, достигнута поставленная цель. Для достижения этой цели, мной в ходе выполнения работы были решены следующие задачи:

1. Рассмотрены и исследованы начальная и смешанная задачи для общего уравнения Кортевега-де Фриза.
2. С помощью метода обратной задачи рассеяния получено решение начальной задачи для общего уравнения Кортевега-де Фриза.
3. Продемонстрировано обобщение метода обратной задачи рассеяния, и с помощью данного метода получено решение некоторого класса смешанных задачи для некоторого класса интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных.
4. Доказано, что $a)$ функция $m(t, \rho)$ есть функция Вейля-Марченко для некоторого оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом $q \in \tilde{B}$; $b)$ потенциал q удовлетворяет краевым условиям; $c)$ потенциал q удовлетворяет общему уравнению Кортевега-де Фриза.