Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МЕТОДОВ В СЖАТИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 219 группы
направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Механико-математического факультета
Мехова Василия Викторовича

Научный руководитель

к.ф.-м. наук, доцент		Д. С. Лукомский
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

д.ф.-м. наук, профессор		В. А. Юрко
уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. В последнее время изображения и иллюстрации стали использоваться повсеместно. На сегодняшний день существует несколько форматов изображений, одними из которых являются – JPEG и RAW. Размер обычного снимка в RAW формате порядка 20 Мб, недостатком же изображения в формате RAW является большой объём файла, который превышает JPEG в три и более раз. JPEG (англ. Joint Photographic Experts Group — объединенная группа экспертов в области фотографии) — является широко используемым методом сжатия изображений. Не смотря на быстрый рост ёмкости устройств хранения, по-прежнему весьма актуальными остаются различные алгоритмы сжатия изображений. Все существующие алгоритмы можно разделить на два больших класса:

1. Алгоритмы сжатия без потерь;
2. Алгоритмы сжатия с потерями.

Алгоритм сжатия без потери данных - архивация (ZIP, RAR и т.д). Алгоритм сжатие данных с потерями — метод сжатия данных, при использовании которого распакованные данные отличаются от исходных, но степень отличия не существенна с точки зрения их дальнейшего использования, одним из которых является алгоритм сжатия JPEG. По сравнению с любыми другими общепринятыми форматами изображений JPEG обеспечивает максимальное сжатие фотографических изображений. Первый алгоритм сжатия использовал свойства частных сумм Фурье и интеграл Фурье, дискретное преобразование Фурье. Алгоритм основан на математических методах, а именно на дискретном косинус преобразовании Фурье. Для получения исходного изображения применяется обратное преобразование Фурье. Рассмотрим данный алгоритм на файле формата BMP, где за каждый пиксель отвечает 1б информации, т.е цвет задается номером от 0 до 255. Изображения JPEG сжимаются в матрицы 8*8 пикселов, которые называются единицами данных. Дискретное косинусное преобразование преобразует единицы данных в сумму косинусных функций. Применяем ДКП (Дискретное косинус преобразование) к каждой матрице. При этом мы получаем матрицу, в которой коэффициенты в левом верхнем углу соответствуют низкочастотной составляющей изображения, а в правом нижнем — высокочастотной. К полученным коэффициентам ДКП применяется квантование. На этапе квантования сжатия изображения происходит отбрасывание коэффициентов дискретного косинусного преобразования, которые несущественны для восстановления изображения, достаточно близкого к оригиналу. Квантование – основной процесс, при выполнении которого теряются данные в методе JPEG-сжатия. Матрицы, используемые для квантования коэффициентов ДКП, хранятся в заголовочной части JPEG-файла. После квантования необходимо перейти от матрицы к вектору с 64 коэффициентами (0..63) Смысл этого вектора – в том, что мы просматриваем коэффициенты 8x8 DCT в порядке повышения пространственных частот. Так, мы получаем вектор отсортированный критериями пространственной частоты: первая величина на векторе (индекс 0) соответствует самой низкой частоте в изображении. Следующий этапом алгоритма является выкидывание строк и столбцов с цветом. При этом возникает вопрос каким образом восстановить исходное изображение. Будем восстанавливать исходное изображение с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа и интерполяции кубическими сплайнами. Интерполирование многочленом Лагранжа на всем отрезке с использованием большого числа узлов интерполяции часто приводит к плохому приближению, что объясняется сильным накоплением погрешностей в процессе вычислений. Кроме того, из-за расходимости процесса интерполяции увеличение числа узлов не обязано приводить к повышению точности. Для того, чтобы избежать больших погрешностей, весь отрезок разбивают на частичные отрезки и на каждом из частичных отрезков приближенно заменяют функцию многочленом невысокой степени. Одним из способов интерполирования на всем отрезке является интерполирование с помощью сплайн-функций.

Актуальность работы: практическая необходимость наибольшего сжатия изображения с наименьшей потерей качества.

Цель выпускной квалификационной работы: теоретически обосновать и практически проверить использование интерполяционных методов для сжатия изображения.

Задачи выпускной квалификационной работы:

1) Знакомство со свойствами частных сумм рядов и коэффициентами Фурье, интегралом Фурье;

2) Исследование алгоритма сжатия JPEG;

3) Реализация интерполяционных методов в WolframMathematica.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, 3 разделов, заключения и приложения.

В первом разделе работы рассматриваются свойства частных сумм рядов Фурье, коэффициенты Фурье и среднее Фейера, интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье,теорему о представимости функции в точке своим интегралом Фурье. Во втором разделе говорится о дискретном преобразовании Фурье и алгоритме сжатия JPEG. В третьем разделе представлены интерполяционный многочлен Лагранжа и интерполяция кубическими сплайнами.

В заключение работы сделаны основные выводы.

В приложении представлена программа выполненная в WolframMathematica и результаты работы.

Основное содержание работы. Свойства частных сумм рядов и интеграл Фурье. Свойства частных сумм рядов Фурье и коэффициенты Фурье, среднее Фейера. В данном разделе будем рассматривать тригонометрическую систему функций

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, ..., x \in [-\pi, \pi]\right\} \tag{1}$$

Тригонометрическая система является полной в $L^2(-\pi, \pi)$ ортогональной системой. Функции системы (1) не нормированы $L^2(-\pi, \pi)$. Ортонормированной является система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, n = 1, 2, ..., x \in [-\pi, \pi]\right\}$$

Каждой функции $f \in L^1(-\pi, \pi)$ соответствует ее ряд Фурье:

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx, \tag{2}$$

где

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx, n = 0, 1, ...,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \; dx, n = 1, 2, ... \; . \tag{3}$$

Определение 1. *Функция*

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nt = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad t \in [-\pi, \pi], \; N = 1, 2, ...,$$

называется ядром Дирихле.

Определение 2. *Система комплекснозначных функций* $\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $x \in [-\pi, \pi]$ *называется тригонометрической системой.*

Определение 3. *Если* $f(x) \in L[\alpha, \beta]$ *и* $[a, b]$ *лежит внутри* $[\alpha, \beta]$, *то инте-*

гральным модулем непрерывности $f(x)$ на $[a,b]$ принято называть выражение

$$\omega_1(\delta,h,f)=\sup_{|h|<\delta}\int\limits_a^b|f(x+h)-f(x)|dx,$$

где $x+h\in[\alpha,\beta]$.

Сформулируем основную теорему для коэффициентов Фурье.

Теорема 1. *Для коэффициентов Фурье функции $f\in L^1(-\pi,\pi)$ справедливы неравенства*

$$max\left\{|a_n(f)|,|b_n(f)|\right\}\leq\frac{1}{4\pi}\omega_1^{(2)}\left(\frac{\pi}{n},f\right)\leq\frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{n},f\right),\ n=1,2,..., \qquad (4)$$

Следствие 1. *Пусть $f\in L^1(-\pi,\pi)$, $g\in L^\infty(-\pi,\pi)$. Тогда коэффициенты Фурье функции $F_x(t)=f(x+t)g(t)$ стремятся к нулю равномерно по $x\in[-\pi,\pi]$.*

Теорема 2. *Тригонометрическая система не является базисом в пространствах $C(-\pi,\pi)$ и $L^1(-\pi,\pi)$.*

Определение 4. *Функция*

$$K_N(t)=\frac{1}{N+1}\sum_{\nu=0}^{N}D_\nu(t)=\frac{2}{N+1}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(N+1)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right]^2, N=0,1,.. \qquad (5)$$

называется ядром Фейера

Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$- непрерывно дифференцируемая функция. На основании теоремы о представимости функции в точке своим рядом Фурье можем, для любого $l>0$, разложить f в ряд Фурьев промежутке $[-l,l]$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \qquad (6)$$

где

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}\,dt,\quad n=0,1,2,..., \qquad (7)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{8}$$

Теорема о представимости функции в точке своим интегралом Фурье.

Определение 5. *Функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будем называть кусочно-гладкой, если она она является кусочно-гладкой в смысле теории рядов Фурье на любом конечном промежутке $[a, b]$, т.е. если в $[a, b]$ найдётся конечное число точек $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ таких, что в каждом открытом интервале (x_j, x_{j+i}) функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, а в каждой точке x_j у $f(x)$ существуют конечные пределы слева и справа*

$$f(x_j - 0) = \lim_{h\to 0+} f(x_j - h), \quad f(x_j + 0) = \lim_{h\to 0+} f(x_j + h),$$

а также существуют и конечны следующие пределы похожие на левую и правую производные

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_j - h) - f(x_j - 0)}{-h}, \quad \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_j + h) - f(x_j + 0)}{-h}.$$

Для доказательства теоремы о представимости функции в точке своим интегралом Фурье будем использовать

Лемма 1 (Римана-Лебега для бесконечного промежутка). *Если $a \in \mathbb{R}$ и $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ абсолютно интегрируема на $(a, +\infty)$, т.е. если $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$, то*

$$\lim_{p\to+\infty} \int\limits_a^{+\infty} f(x)\cos px dx = \lim_{p\to+\infty} \int\limits_a^{+\infty} f(x)\sin px dx = 0.$$

Теорема 3 (теорема Фубини). *Если функция интегрируема по совокупности переменных, то все её повторные интегралы существуют и не только равны между собой, но равны и её кратному интегралу.*

Теорема 4 (о представимости функции в точке своим рядом Фурье). *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$- кусочно-гладкая абсолютно интегрируемая функция. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\int\limits_0^{+\infty} [a(y)\cos yx + b(y)\sin yx]dy = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos tydt,$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin tydt.$$

Интеграл Фурье кусочно-гладкой абсолютно интегрируемой функции равен полусумме её пределов слева и справа. В частности, в точке непрерывности функции он в точности равен значению функции.

Определение 6. *Функция*

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin v}{v} dv,$$

называется интегралом Дирихле.

Дискретное преобразование Фурье. Начальные сведения о дискретном преобразовании Фурье. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - 2\pi$ - периодическая, которая может быть представлена своим рядом Фурье, т.е. такая, что для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \tag{9}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}.$$

Известно, что это разложение заведомо имеет место, если f - непрерывная кусочно-гладкая 2π - периодическая функция.

Определение 7. *Набор чисел $A_{-N+1}, A_{-N+2}, \ldots, A_N$ найденных по формуле (2.3), называется прямым дискретным преобразованием Фурье функции $\{f_k\}$. Его также можно трактовать как функцию $\{A_m\}$, заданную на той же самой сетке $x_m = \pi m/N(-N+1 \le m \le N)$. В частности, можно использовать формулу (2.2) для построения функции $\{A_m\}$ новой функции $\{f_k\}$, называемой дискретным преобразованием Фурье функции $\{A_m\}$.*

Быстрое преобразование Фурье. Быстрое преобразование Фурье есть способ организации вычислений, применяемый для нахождения дискретного преобразования Фурье. Его идея состоит в том, чтобы, например, выделить группы слагаемых, которые входят в выражения для различных коэффициентов A_l. Экономия вычислений достигается за счёт того, что каждая группа вычисляется только один раз.

Предположим, что нужно найти прямое дискретное преобразование Фурье, то есть для данной дискретной функции $\{f_k\}$ нужно найти числа

$$A_n = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N+1}^{N} f_k e^{-il\frac{k\pi}{N}}, \quad -N+1 \leq n \leq N \tag{10}$$

Допустим, что число N является составным и представлено в виде $N = p_1 \cdot p_2$. Применяя алгоритм деления с остатком, запишем привольное целое число n лежащее между $-N+1$ и N в виде $n = n_1 + p_1 n_2$, где остаток n_1 лежит в пределах от $-p_1$ до p_1, а частное n_2 - в пределах от $-p_2$ до p_2 :

$$-p_1 < n_1 < p_1, \quad -p_2 < n_2 < p_2. \tag{11}$$

Можно задать число n из интервала $-N+1$ до N : для этого достаточно числа n_1 и n_2 удовлетворяющие неравенствам . Пользуясь этим соображениям, введём обозначение $A_n = A(n_1, n_2)$

Алгоритм сжатия JPEG. В данном разделе будем рассматривать самый первый алгоритм сжатия JPEG. Ключевым компонентом работы алгоритма является дискретное косинусное преобразование. Дискретное косинусное преобразование представляет собой разновидность преобразования Фурье и, так же как и оно, имеет обратное преобразование. При сжатии изображение преобразуется из цветового пространства RGB в YCbCr. Необходимость этого преобразования заключается в том, что глаз более чувствителен к яркости цвета, чем к его оттенку. Y - это величина яркости цвета, а Cb и Cr - цветовые величины, определяющие оттенок и насыщение цвета. Уже на этом этапе происходят потери в информации, так как формулы преобразования RGB в YCbCr и обратно не позволяют точно сохранить некоторые цвета. Графическое изображение можно рассматривать как совокупность пространственных волн, причем оси X и Y совпадают с шириной и высотой картинки, а по оси Z откладывается значение цвета соответствующего пикселя изображения. Дискретное косинусное преобразование позволяет переходить от пространственного представления картинки к ее спектральному представлению и обратно. Воздействуя на спектральное представление картинки, состоящее из "гармоник то есть, отбрасывая наименее значимые из них, можно балансировать между качеством воспроизведения и степенью сжатия.

Формула дискретного косинусного преобразования

$$DCT[i,j] = \frac{1}{\sqrt{2N}} C(i)C(j) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} IDCT[x,y] \cos\left[\frac{(2x+1)i\pi}{2N}\right] \cos\left[\frac{(2y+1)i\pi}{2N}\right]$$

$$C(i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, i = 0 \\ 1, i > 0 \end{cases}$$

Формула обратного дискретного косинусного преобразования

$$IDCT[i,j] = \frac{1}{\sqrt{2N}} C(i)C(j) \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} DCT[i,j] \cos\left[\frac{(2x+1)i\pi}{2N}\right] \cos\left[\frac{(2y+1)i\pi}{2N}\right]$$

$$C(i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, i = 0 \\ 1, i > 0 \end{cases}$$

Дискретное косинусное преобразование преобразует матрицу пикселов размером NxN (в JPEG-сжатии N = 8) в матрицу частотных коэффициентов соответствующего размера. В получившейся матрице коэффициентов низкочастотные компоненты расположены ближе к левому верхнему углу, а высокочастотные - справа и внизу.

Квантование. После расчета DCT следующий шаг включает поиск и отбрасывание коэффициентов, вклад которых в формирование изображения минимален. Для решения этой задачи стандарт JPEG определяет простой механизм именуемый квантованием. Чтобы выполнить квантование коэффициентов DCT, необходимо разделить их на конкретное значение (коэффициент квантования) и округлить результат до ближайшего целого числа. Обход диагональной змейкой. После квантования необходимо перейти от матрицы к вектору с 64 коэффициентами (0..63) Смысл этого вектора – в том, что мы просматриваем коэффициенты 8x8 DCT в порядке повышения пространственных частот. Мы получаем вектор отсортированный критериями пространственной частоты: первая величина на векторе (индекс 0) соответствует самой низкой частоте в изображении. С увеличением индекса на векторе, мы получаем величины соответствующие высшим частотам (величина с индексом 63 соответствует амплитуде самой высокой частоте в блоке 8x8). Таким образом в конце вектора, что в конце будут идти подряд несколько нулей, которые хорошо сжимаются.

Интерполирование и приближение функций. Задача интерполирования состоит в том, чтобы по значению функции $f(x)$ в конечном числе точек отрезка восстановить её значения в остальных точках этого отрезка. Задача интерполирования возникает, например, в том случае, когда известны результаты измерения $y_k = f(x_k)$ некоторой физической величины $f(x)$ в точках $x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$ и требуется определить её значения в других точках. Интерполирование используется также при сгущении таблиц, когда вычисление значений $f(x)$ трудоёмко. Иногда возникает необходимость приближённой замены или аппроксимации данной функции другими функциями, которые легче вычислить. В частности рассматривается задача о наилучшем приближении в нормированном пространстве H, когда функцию $f \in H$ требуется заменить линейной комбинацией φ заданных элементов из H так, чтобы отклонение $\|f-\varphi\|$ было минимальным. Результаты и методы теории интерполирования и приближение функций нашли широкое применение в вычислительном анализе, например при выводе формул численного дифференцирования и интегрирования, при построении сеточных аналогов задач математической физики.

Интерполяционный многочлен Лагранжа. Постановка задачи интерполяции: по известному набору узлов $\{x_k\}_{k=1}^n$ и значению функции $f\{x_k\}$ построить многочлен наименьшей степени такой, что $L\{x_k\} = f\{x_k\}$

Теорема 5. *Решением задачи интерполяции является многочлен вида*

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x) f(x_k) \tag{12}$$

и степень данного многочлена n. Данный многочлен называется интерполяционным многочленом Лагранжа

Погрешность интерполирования. Заменяя функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом $L_n(x)$, мы допускаем погрешность

$$r_n(x) = f(x) - L_n(x),$$

которая называется погрешностью интерполирования или, что то же самое, остаточным членом интерполяционной формулы. В узлах интерполирования погрешность равна нулю. Приведем теорему об оценке интерполирования.

Теорема 6. *(об оценке погрешности интерполирования). Справедлива формула*

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x), \tag{13}$$

где $\xi \in [a, b]$ и $\omega(x)$–многочлен определённый согласно (3.10).

Следствие 2. *Из теоремы о погрешности интерполирования следует оценка*

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|, \tag{14}$$

где $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$. *В частности, если* $f(x)-$ *алгебраический многочлен степени* n, *то интерполирование, проведённое по любым точкам* $x_0, x_1, \dots, x_n$, *осуществляется точно, т.е* $L_n(x) \equiv f(x)$.

Оценка интерполяции зависит от величины $|\omega(x)|$, т.е чем она меньше, тем лучше будет оценка интерполяции, входящую в оценку, можно минимизировать за счёт выбора узлов интерполирования.

Интерполирование сплайнами. Интерполирование многочленом Лагранжа на всем отрезке $[a, b]$ с использованием большого числа узлов интерполяции часто приводит к плохому приближению, что объясняется сильным накоплением погрешностей в процессе вычислений. Кроме того, из-за расходимости процесса интерполяции увеличение числа узлов не обязано приводить к повышению точности. Для того, чтобы избежать больших погрешностей, весь отрезок $[a, b]$ разбивают на частичные отрезки и на каждом из частичных отрезков приближенно заменяют функцию $f(x)$ многочленном невысокой степени(так называемая кусочно-полиномиальная интерполяция).

Одним из способов интерполирования на всем отрезке является интерполирование с помощью сплайн-функций. Сплайн-функцией или сплайном называют кусочно-полиномиальную функцию, определенную на отрезке $[a, b]$ и имеющую на этом отрезке некоторое число непрерывных производных.

Пусть на $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Введем сетку

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b$$

и обозначим $f_i = f(x_i),\ i = 0, 1, ..., N.$

Сплайном, соответствующим данной функции $f(x)$ и данным узлам $\{x_i\}_{i=0}^N$, называется функция $s(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, ..., N$, функция $s(x)$ является многочленом третьей степени;
2. функция $s(x)$, а также ее первая и вторая производные непрерывны на $[a, b]$;
3. $s(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, ..., N.$

Последнее условие называется условием интерполирования, а сплайн, определяемый условиями 1-3, называется также интерполяционным кубическим сплайном.

Теорема 7. *(существование и единственность сплайна). Сплайном, соответствующим данной функции $f(x)$ и данным узлам $\{x_i\}_{i=1}^{N}$, называется функция $s(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, ..., N$, функция $s(x)$ является многочленом третьей степени;*
2. *функция $s(x)$, а также ее первая и вторая производные непрерывны на $[a, b]$;*
3. *$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, ..., N$.*

Лемма 2. *Для $f(x) \in C^{(4)}[a, b]$ справедливы оценки*

$$\|f''(x) - s''_h(x)\|_{C(\omega_h)} \leq \frac{3M_4}{4} h^2. \tag{15}$$

Теорема 8. *Для $f(x) \in C^{(4)}[a, b]$ справедливы оценки*

$$\|f(x) - s_h(x)\|_{C[a,b]} \leq M_4 h^4, \tag{16}$$

$$\|f'(x) - s'_h(x)\|_{C[a,b]} \leq M_4 h^3, \tag{17}$$

$$\|f''(x) - s''_h(x)\|_{C[a,b]} \leq M_4 h^2. \tag{18}$$

Алгоритм "Применение интерполяционных методов в сжатии изображений"

Постановка задачи: восстановить изображение с помощью интерполяционных методов при наименьшей потери качества.

1. Открытие файла;

2. Получение RGB каналов изображения;

3. Перевод RGB каналов в YCbCr;

4. Разрежение матриц каналов с коэффициентом k (т.е оставляем каждую к-тую точку);

5. Применение Дискретного преобразования Фурье к разреженным матрицам каналов YCbCr;

6. Квантование каждого преобразованного канала с соответствующим коэффициентом;

7. Применение обратного преобразования Фурье к преобразованным каналам;

8. Интерполяция каналов изображения с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа и сплайн-интерполяция;

9. Перевод полученных изображений обратно в RGB;

10. Показ результата;

11. Получение оценок погрешностей.

Заключение. В данной работе были рассмотрены свойства частных сумм рядов Фурье, среднее Фейера, интеграл Фурье, которые использовались в одном из первых алгоритмов сжатия JPEG. К недостаткам сжатия по стандарту JPEG следует отнести появление на восстановленных изображениях при высоких степенях сжатия характерных артефактов: изображение рассыпается на блоки размером 8x8 пикселей, в областях с высокой пространственной частотой возникают артефакты в виде шумовых ореолов. Следует отметить, что стандарт JPEG предусматривает использование специальных фильтров для подавления блоковых артефактов, но на практике подобные фильтры, несмотря на их высокую эффективность, практически не используются. Однако, несмотря на недостатки, JPEG получил очень широкое распространение из-за достаточно высокой степени сжатия, поддержке сжатия полноцветных изображений и относительно невысокой вычислительной сложности. Также исследовано интерполирование, с помощью многочлена Лагранжа и интерполирование кубическими сплайнами, с помощью которых получили практическое применение для восстановления исходного изображения. Получены результаты численного эксперимента. Сделан вывод что результат восстановления исходного изображения не сильно отличается от восстановления изображения кубическими сплайнами.