Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

СИСТЕМА ХААРА В ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 219 группы

направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Царевой Валентины Геннадиевны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.		Д.С.Лукомский
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой:

профессор, д.ф.-м.н.		В.А.Юрко
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017 год

Введение. Дифференциальные уравнения широко используются для математического моделирования процессов и явлений в различных областях науки и техники.

Множество переходных процессов в радиотехнике, кинетика химических реакций, динамика биологических популяций, движение космических объектов, модели экономического развития исследуются с помощью дифференциальных уравнений.

Актуальность темы дипломной работы состоит в том, что ЛДУ имеют аналитически сложное решение и составление программы, реализируещей численное решение облегчило бы эту задачу.

Данная работа посвящается численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка с применением системы Хаара.В дипломной работе изучаются свойства систем Хаара и на их основе получился алгоритм решения задачи Коши и оценка погрешности численного приближения.

Вейвлет Хаара — один из первых и наиболее простых вейвлетов. Он был предложен венгерским математиком Альфредом Хааром в 1909 году. Вейвлеты Хаара ортогональны, обладают компактным носителем, хорошо локализованы в пространстве, но не являются гладкими.
Родительская (материнская) вейвлет-функция $\varphi(x)$ с нулевым значением интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(x)\,dx = 0$$

задается следующим образом:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, \qquad 0 \le x < 1/2, \\ -1, \qquad 1/2 \le x < 1, \\ 0, x \notin [0,1). \end{cases}$$

На практике преобразование Хаара часто используется для сжатия входных сигналов, компрессии изображений, в основном цветных и черно-белых с плавными переходами.

В работах G.Hall,J.M.Watt,M.Ohkita, Y.Kobayashi и других применялись методы численного решения дифференциальных уравнений с использованием системы Хаара. Сама искомая функция представлялась в виде частичной суммы ряда по системе Хаара. В уравнениях присутствуют производные неизвестной функции, необходимо было ввести оператор дифференцирования ступенчатой функции. Из-за этого сложно найти оценку погрешности данного метода. В работе Д.С.Лукомского "Применение системы Хаара для решения задачи Коши"была рассмотрена задача Коши для линейного уравнения второго порядка и многочисленном Хаара заменялась ее вторая производная и был указан алгоритм получения решения. В данной работе предлагаются два способа нахождения решения задачи Коши вида

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \qquad 0 \le x \le 1, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

В первой главе данной работы рассматриваются определения системы Хаара, свойства двоичных интервалов, утверждения и следствие, быстрое преобразование Хаара.

Во второй главе данной работы рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения, определения порядка уравнения и частного и общего решений уравнения, задача Коши и теорема Пикара о существовании и решении задачи Коши. Так же,в главе говорится о методах решения ОДУ и ЛДУ первого порядка.

В третье главе данной работы рассматриваются два различных алгоритма для нахождения численного решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка, рассматриваются свойства приближенного решения и оценки погрешности.

В приложении представлены два различных алгоритма для нахождения численного решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка, реализованные на языке c# и в системе Wolfram Mathematic.

Цель работы: Изучить применение системы Хаара в решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.
Задачи:
1) Изучить систему Хаара, ее свойства и характеристики, и ее применение в решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка;
2) Разработать алгоритм применения системы Хаара в решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка;
3) Написать программу по разработанному алгоритму применения системы Хаара в решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка на языках $c++$ и Wolfram Mathematics;
4) Провести сравнительный анализ с одним из ранее разработанных методов,

например, с методом Рунге-Кутты;
5) Провести численный эксперимент.
Дифференциальное уравнение широко используется для математического моделирования процессов и явлений в различных областях науки и техники.

Основное содержание работы.

Система Хаара в численном решении дифференциальных уравнений.Свойства системы функций Хаара.

Определение 1.1. *Система Хаара– это система функций*

$$\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, x \in [0,1],$$

в которой

$$\chi_0(x) \equiv 1,$$

а функция

$$\chi_n(x) \text{ с } 2^k < n \le 2^{k+1}, k = 0, 1, ...,$$

определяется так:

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0, x \notin \bar{\Delta}_n, \\ 2^{\frac{k}{2}}, x \in \Delta_n^+, \\ -2^{\frac{k}{2}}, x \in \Delta_n^-. \end{cases}$$

Значения $\chi_n(x)$ в точках разрыва и в концах отрезка $[0,1]$ выбираются так, чтобы $\chi_n(x) \in D_2{}^k$, т.е. чтобы выполнялись равенства: $\chi_n(x) = \lim_{\delta \to \ 0} \frac{1}{2}[\chi_n(x+\delta) + \chi_n(x-\delta)], x \in (0,1)$, $\chi_n(0) = \lim_{\delta \to \ +0} \chi_n(\delta)$, $\chi_n(1) = \lim_{\delta \to \ +0} \chi_n(1-\delta)$.

Группу функций $\{\chi_n(x)\}_{n=1+2^k}^{2^{k+1}}, k = 0, 1, ...,$ будем называть $k-$ пачкой. Часто удобнее место обычной "одинарной"нумерации системы Хаара употреблять нумерацию, прямо указывающую в какой пачке лежит данная функция, точнее, полагают при $k = 0, 1, ..., i = 1, 2, ..., 2^k, n = i + 2^k$ $\chi_k^{(i)}(x) = \chi_n(x), \chi_0^{(0)}(x) = 1, x \in [0,1]$.

Следовательно, система Хаара состоит из объединения пачек $\{\chi_k^{(i)}(x)\}_{i=1}^{2^k}, k = 0, 1, ...,$ и функции $\chi_0^{(0)}(x)$. Из свойств двоичных интегралов непосредственно вытекает, что система Хаара-ортонормарованная система (О.Н.С.). Для того чтобы доказать ее полноту, отметим следующее утверждение:

Утверждение 1.1 *Для $N = 2^k, k = 0, 1...$, линейная оболочка $G_N(\chi)$ функций $\chi_n(x)_{n=1}^N$ совпадает с D_N, т.е. при $N = 2^k, k = 0, 1, ...$,*

$$G_N(\chi) := \{f(x) : f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x)\} = D_n. \tag{1.1}$$

Построение алгоритма решения задачи Коши с помощью системы Хаара. Перейдем к рассмотрению применения системы Хаара к численному решению задачи Коши.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x), & 0 \le x \le 1, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Представим $y'(x)$ в виде разложения по системе Хаара $y'(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \chi_k(x)$. Проинтегрируем это выражение от x_0 до x

$$\int\limits_{x_0}^{x} y'(t)dt = y(x) - y(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

где $\varphi_k(x)$ функции Фебера-Шаудера,задаваемая равенством

$$\varphi_{2^n+j}(x) = \begin{cases} x - \dfrac{j}{2^n}, x \in [\dfrac{j}{2^n}; \dfrac{j+\frac{1}{2}}{2^n}], \\ \dfrac{j+1}{2^n} - x; x \in [\dfrac{j+\frac{1}{2}}{2^n}; \dfrac{j+1}{2^n}], \\ 0, x \notin [\dfrac{j}{2^n}; \dfrac{j+1}{2^n}] \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$y(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{3.2}$$

Запишем функции $a(x)$ и $b(x)$ в виде разложения по системе Хаара

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x)$$
$$b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \chi_k(x)$$

Подставим полученные представления в уравнение (3.1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \chi_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x)(y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \chi_k(x) \tag{3.3}$$

Выверем некоторое $N = 2^n - 1$ и перепишем равенство (3.3) следующим образом

$$\sum_{k=0}^{N} \chi_k(x)(c_k + a_k y_0 + a_k \sum_{j=0}^{N} c_j \varphi_j(x) - b_k) = 0$$

Рассмотрим последнюю сумму в точках $\{x_i\}_{i=0}^{N}$, получим

$$\sum_{k=0}^{N} \chi_k(x_i)(c_k + a_k y_0 + a_k \sum_{j=0}^{N} c_j \varphi_j(x_i) - b_k) = 0 \tag{3.4}$$

Таким образом (3.3) это СЛАУ вида $Tx = d$ относительно неизвестных c_k. Коэффициенты системы задаются следующими равенствами:

$$\begin{cases} d_i = \sum\limits_{k=0}^{N} b_k \chi_k(x_i) - y_0 \sum\limits_{k=0}^{N} a_k \chi_k(x_i), \\ t_{i,j} = \chi_j(x_i) + \varphi_j(x_i) \sum\limits_{k=0}^{N} a_k \chi_k(x_i) \end{cases}$$

Решаем эту систему методом Гаусса и находим коэффициенты c_k. Далее, по формулам (3.2) находим $y(x)$

Коэффициенты a_k, b_k находятся с помощью прямого быстрого преобразования Хаара, по формулам, в соответствии 3.1 настоящей работы.

Реализованный алгоритм и его результаты представлены в приложении А.
Алгоритм решения задачи Коши с помощью двоично-ступенчатых функций. Продолжим рассматривать задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка (3.1) и приведем другой алгоритм.

Предполагаем, что $a(x), b(x) \in C[0, 1]$ - непрерывные функции. Будем искать приближенное решение $y_n(x)$ задачи Коши, представляя его производную в виде полинома по системе Хаара $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ порядка не выше 2^n:

$$y'_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{y}_{n,k} \chi_k(x).$$

Такой полином является ступенчатой функцией

$$y_n'(x) = y_{n,k}, \qquad k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}, \quad k = 0, \ldots, 2^n - 1,$$

которая во внутренних точках разрыва равна полусумме своих односторонних пределов, а в граничных точках 0 и 1 - своему пределу изнутри отрезка $[0, 1]$, т.е. $y_n'(0) = y_{n,0}$, $y_n'(k2^{-n}) = (y_{n,k-1} + y_{n,k})/2$ при $k = 1, \ldots, 2^n - 1$, $y_n'(1) = y_{n,2^n-1}$.

Сразу заметим, что переход от набора $\{y_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ значений ступенчатой функции к набору $\{\hat{y}_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ ее коэффициентов Фурье - Хаара (и обратно) может быть осуществлен с использованием быстрого преобразования Хаара.

Восстановим функцию $y_n(x)$ по ее производной:

$$y_n(x) = y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}(x - k2^{-n}), \qquad k2^{-n} \le x \le (k+1)2^{-n},$$

где $k = 0, \ldots, 2^n - 1$. Функция $y_n(x)$ является кусочно-линейной с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$. Фиксируем набор промежуточных точек $x_{n,k} = (k + \theta_{n,k})2^{-n}$, $0 < \theta_{n,k} < 1$, $k = 0, \ldots, 2^n - 1$.

Потребуем, чтобы функция $y_n(x)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению (3.1) на множестве точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$.

Получим систему уравнений

$$y_n'(x_{n,k}) + a(x_{n,k})y_n(x_{n,k}) = b(x_{n,k}), \qquad k = 0, \ldots, 2^n - 1.$$

С учетом представления функций $y_n(x)$ и $y_n'(x)$ и обозначив для краткости $a_{n,k} = a(x_{n,k})$ и $b_{n,k} = b(x_{n,k})$ будем иметь

$$y_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}\theta_{n,k}2^{-n}\right) = b_{n,k}, \qquad k = 0, \ldots, 2^n - 1. \quad (3.5)$$

Из системы линейных алгебраических уравнений (3.5) величины $\{y_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ определяются рекуррентно и однозначно, если только $1 + a_{n,k}\theta_{n,k}2^{-n} \ne 0$ для всех $k = 0, \ldots, 2^n - 1$, что заведомо выполняется для достаточно больших n, а именно, при $2^n \ge \|a\| = \max_{x \in [0,1]} |a(x)|$.

Можно избежать произвола при выборе множества промежуточных точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ полагая, например, $\theta_{n,k} = 1/2$. В таком случае каждая точка $x_{n,k}$

будет серединой отрезка $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$. Далее мы покажем, что от выбора промежуточных точек принципиально не зависят аппроксимативные свойства приближенного решения $y_n(x)$ задачи Коши. Для этого упростим рекуррентные соотношения(3.5) путем приведения их к следующему виду

$$z_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j}\right) = b_{n,k}, \qquad k = 0, \ldots, 2^n - 1. \tag{3.6}$$

Из уравнений (3.6) величины $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ по-прежнему определяются рекуррентно и при том однозначно для любого натурального числа n.

Пусть функции $z_n(x)$ и $z_n'(x)$ имеют тот же смысл, что и пара $y_n(x)$ и $y_n'(x)$, т.е. в представлении последних величины $y_{n,k}$ заменены на $z_{n,k}$. Именно, $z_n'(x) = z_{n,k}$, где $k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}$, $k = 0, \ldots, 2^n - 1$, и

$$z_n(x) = y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} + z_{n,k}(x - k2^{-n}), \qquad k2^{-n} \le x \le (k+1)2^{-n}. \tag{3.7}$$

Функцию $z_n(x)$ нетрудно определить из рекуррентных соотношений (3.6) по входным интерполяционным и начальным данным: $\{a_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$, $\{b_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ и y_0.

Реализованный алгоритм и его результаты представлены в приложении А. **Свойства приближенного решения. Оценка погрешности.** Введем следующие характеристики задачи (3.1) Характеристики:

$$C = |y_0|\,\|a\| + \|b\|, \qquad \Omega_n = |y_0|\omega(a, \tfrac{1}{2^n}) + \omega(b, \tfrac{1}{2^n}), \qquad \Omega_n^* = \omega(a, \tfrac{1}{2^n}) + \tfrac{\|a\|}{2^n},$$

где $\omega(f,\delta) = \sup_{|x_1 - x_2| \le \delta} |f(x_1) - f(x_2)|$ - равномерный модуль непрерывности, а также характеристики входных интерполяционных и начальных данных

$$A_n = \max_{0 \le k \le 2^n - 1} |a_{n,k}|, \qquad B_n = \max_{0 \le k \le 2^n - 1} |b_{n,k}|, \qquad C_n = |y_0|A_n + B_n,$$

и приближенных решений

$$Y_n = \max_{0 \le k \le 2^n - 1} |y_{n,k}|, \qquad Z_n = \max_{0 \le k \le 2^n - 1} |z_{n,k}|, \qquad \Delta_n = \max_{0 \le k \le 2^n - 1} |y_{n,k} - z_{n,k}|.$$

Теорема 3.1

Для любого $n = 1, 2, \ldots$ *выполняется неравенство*

$$\|y' - z'_n\| \le e^{\|a\|}(\varOmega_n + Ce^{\|a\|}\varOmega^*_n). \qquad (3.12)$$

Неравенство (3.12) можно записать в виде

$$\|y' - z'_n\| = O\big(\omega(a, \tfrac{1}{2^n}) + \omega(b, \tfrac{1}{2^n}) + \tfrac{1}{2^n}\big), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Такое же соотношение будет иметь место для нормы $\|y' - y'_n\|$ *для достаточно больших* n*. Постоянные в O-соотношениях зависят от величин* $\|a\|$*,* $\|b\|$ *и* $|y_0|$*.*

Результаты численного эксперимента. Рассмотрим алгоритм решения задачи Коши (3.1)

1)Зафиксируем $n \ge 2$ и построим систему узлов $x_{n,k} = (k + \Theta_{n,k}2^(-n), \Theta_{n,k} = 1/2, k = 0, ..., 2^n - 1$ Вычисляем $a_{n,k} = a(x_{n,k})$ и $b_{n,k} = b(x_{n,k})$.

2)Используя рекуррентные соотношения

$$z_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j}\right) = b_{n,k}, \qquad k = 0, \ldots, 2^n - 1.$$

находим величины $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$

3)Восстановим функцию $z_n(x)$ по ее производной:

$$z_n(x) = y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} + z_{n,k}(x - k2^{-n}), \qquad k2^{-n} \le x = (k + 1/2)2^{-n},$$

где $k = 0, ..., 2^n - 1$. Функция $z_n(x)$ является кусочно-линейной с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$.

Рассмотрим задачу Коши(3.1), где

$$a(x) = \begin{cases} x, x \in [0, 1/2], \\ 1 - x, x \in [1/2, 1], . \end{cases}$$

$$b(x) = 4\cos(4x) + a(x) * \sin(4x),$$

с начальным условием y(0)=0. Очевидно, что точное решение данной задачи есть $y(x) = \sin(4x)$.

Приведем графики точного и приближенного решений,также графики погрешности двух методов. В качестве дополнительного примера привели реализованное сравнение с Рунге-Куттом 4 порядка (Приложение Б).

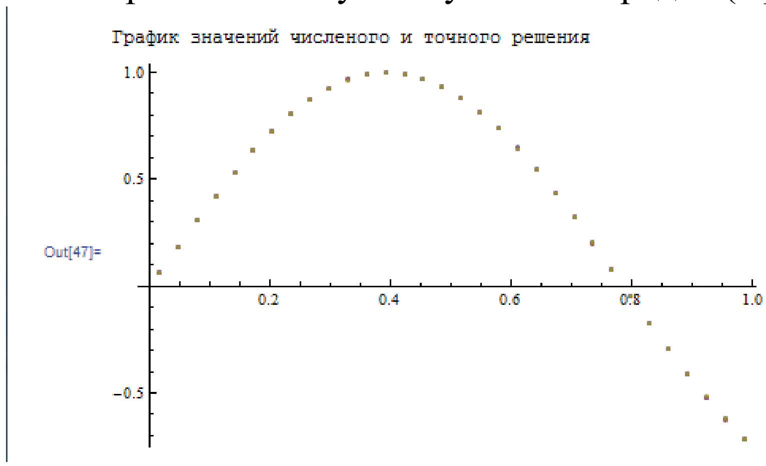


Рисунок 2-График значений точного решения.

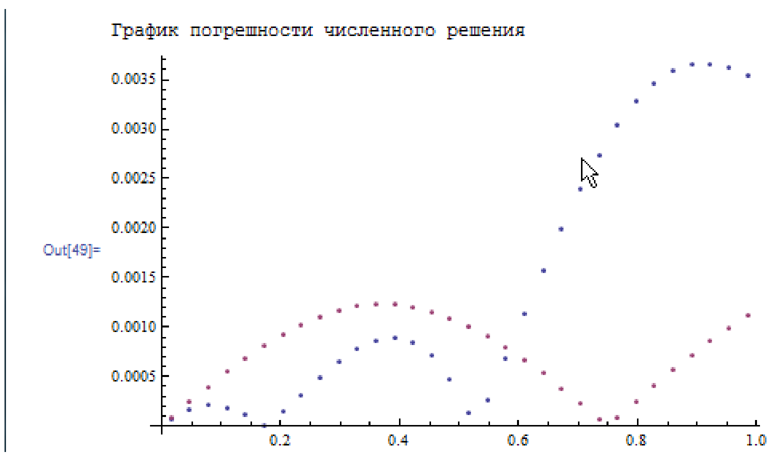
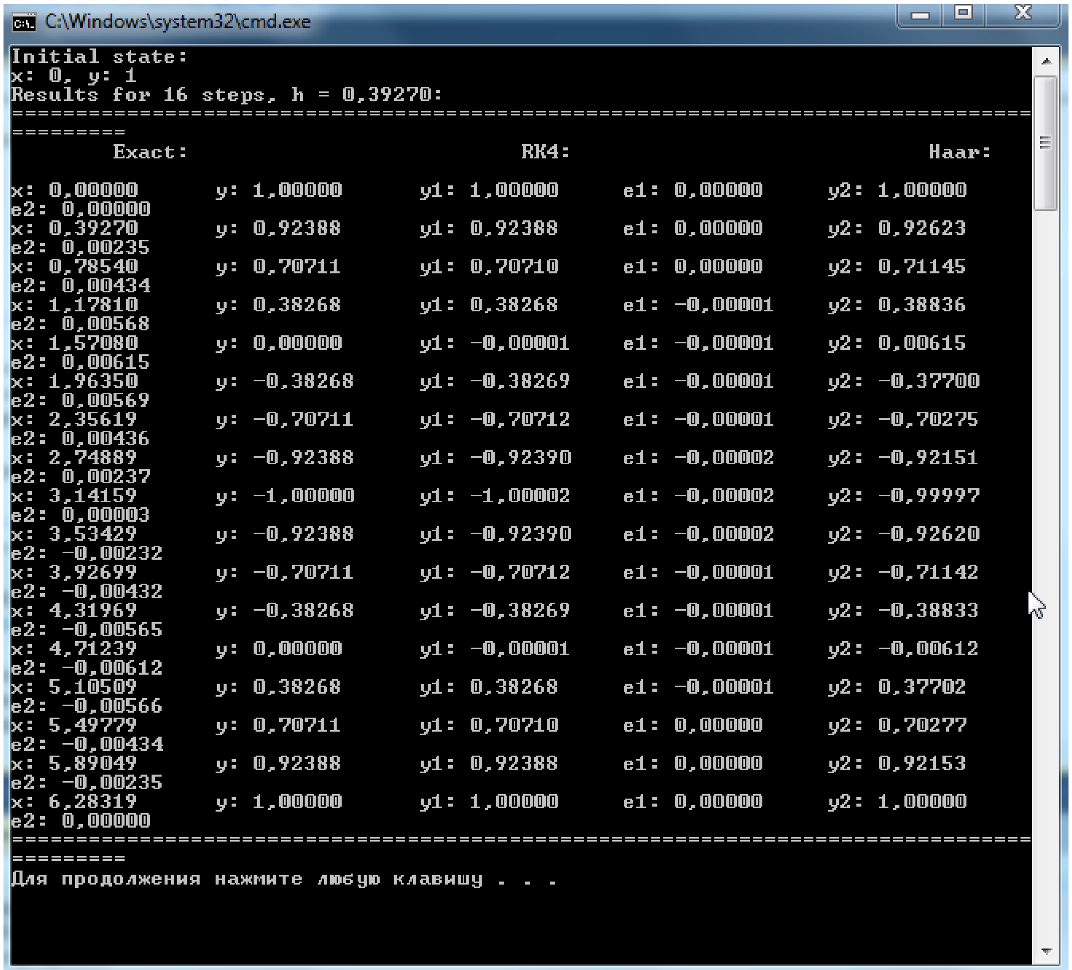


Рисунок 3-График погрешности численного решения.



```
C:\Windows\system32\cmd.exe
Initial state:
x: 0, y: 1
Results for 16 steps, h = 0,39270:
==========================================================================================
        Exact:                              RK4:                              Haar:

x: 0,00000       y: 1,00000      y1: 1,00000      e1: 0,00000      y2: 1,00000
e2: 0,00000
x: 0,39270       y: 0,92388      y1: 0,92388      e1: 0,00000      y2: 0,92623
e2: 0,00235
x: 0,78540       y: 0,70711      y1: 0,70710      e1: 0,00000      y2: 0,71145
e2: 0,00434
x: 1,17810       y: 0,38268      y1: 0,38268      e1: -0,00001     y2: 0,38836
e2: 0,00568
x: 1,57080       y: 0,00000      y1: -0,00001     e1: -0,00001     y2: 0,00615
e2: 0,00615
x: 1,96350       y: -0,38268     y1: -0,38269     e1: -0,00001     y2: -0,37700
e2: 0,00569
x: 2,35619       y: -0,70711     y1: -0,70712     e1: -0,00001     y2: -0,70275
e2: 0,00436
x: 2,74889       y: -0,92388     y1: -0,92390     e1: -0,00002     y2: -0,92151
e2: 0,00237
x: 3,14159       y: -1,00000     y1: -1,00002     e1: -0,00002     y2: -0,99997
e2: 0,00003
x: 3,53429       y: -0,92388     y1: -0,92390     e1: -0,00002     y2: -0,92620
e2: -0,00232
x: 3,92699       y: -0,70711     y1: -0,70712     e1: -0,00001     y2: -0,71142
e2: -0,00432
x: 4,31969       y: -0,38268     y1: -0,38269     e1: -0,00001     y2: -0,38833
e2: -0,00565
x: 4,71239       y: 0,00000      y1: -0,00001     e1: -0,00001     y2: -0,00612
e2: -0,00612
x: 5,10509       y: 0,38268      y1: 0,38268      e1: -0,00001     y2: 0,37702
e2: -0,00566
x: 5,49779       y: 0,70711      y1: 0,70710      e1: 0,00000      y2: 0,70277
e2: -0,00434
x: 5,89049       y: 0,92388      y1: 0,92388      e1: 0,00000      y2: 0,92153
e2: -0,00235
x: 6,28319       y: 1,00000      y1: 1,00000      e1: 0,00000      y2: 1,00000
e2: 0,00000
==========================================================================================
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Рисунок 4-Результат сравнения с методом Рунге-Кутта 4 порядка.

Заключение. В ходе данной работы была рассмотрена система Хаара, которая была применена к численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка. Было рассмотрено два алгоритма и они были реализованы на языке программирования c#и на языке Mathematica в системе WolframMathematic.Был проведен сравнительный анализ.Была получена оценка погрешности. В ходе численного эксперимента был получен результат-алгоритм вычисления по системе Хаара оказался точнее, чем алгоритм Рунге-Кутта.