Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций стохастического анализа

КВАНТОВЫЕ ФРЕЙМЫ
АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 219 группы
направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Бояркиной Ирины Александровны

Научный руководитель		
Д. ф.-м. наук		П. А. Терехин
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия
Зав. кафедрой		
Д. ф.-м. наук		С. П. Сидоров
должность, уч. степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Понятие фрейма впервые ввели в работе Даффина и Шеффера в 1952 году. Появление этого понятие было связано с изучением экспоненциальной системы. Однако, некоторые системы, рассматриваемые до работы Даффина и Шеффера, являлись фреймами.

После введения системы Рисса и фреймы не исследовались более тридцати лет. Исключением оказалась работа Р. Юнга, где он установил тесную связь между системами Рисса и фреймами. Уже в конце 80-х гг. интерес к данным понятиям возобновился, т.к. началось активное развитие теории всплесков (вейвлетов).

Многочисленные свойства фреймов позволяют широко использовать их как в теоретических, так и в практических целях. Например, для анализа звуковых сигналов или изображений. В работе С. Малла приведено описание применения фреймов в анализе сигналов для уменьшения шума, а также в анализе изображений.

Цель магистерской работы: изучение и реализация алгоритма разложения по фрейму.

Для достижения поставленной цели потребовалось решить следующие задачи:

1) Рассмотреть квантовые фреймы: определение, свойства.

2) Изучить проекционные фреймы.

3) Изучить алгоритм разложения по фрейму и реализовать его (была выбрана система Wolfram Mathematica).

Магистерская работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников и приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение раскрывает актуальность темы, цель, задачи и методы исследования, раскрывает теоретическую и практическую значимость работы.

В первой главе «Квантовые фреймы» рассматриваются фреймы в банаховом пространстве, их свойства, а также дается определение квантовых фреймов и их спектра.

Определение 1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов пространства H называется *фреймом*, если существуют постоянные $A, B, 0 < A \leq B < \infty$, такие, что для любого вектора $h \in H$

$$A\|h\|_H^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 \leq B\|h\|_H^2. \tag{1}$$

Постоянные A и B называются нижней и верхней границами фрейма. Если $A = B$, то система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется жестким фреймом. Если $A = B = 1$, т.е. выполняется равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 = \|h\|_H^2,$$

то говорят, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является нормированным жестким фреймом, или фреймом Парсеваля.

Фреймы обладают некоторыми свойствами, а именно:

1. Теорема о представлении: пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм в гильбертовом пространстве H. Тогда для любого вектора $h \in H$ найдется числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$, такая, что

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n. \tag{2}$$

2. Разложение по фрейму (2) допускает линейный алгоритм вычисления коэффициентов, а именно:

Существует система $\{\varphi_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset H$, такая, что для любого вектора $h \in H$ числовая последовательность $\{\langle h, \varphi_n^* \rangle \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит пространству l_2 и

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \varphi_n^* \rangle \varphi_n. \tag{3}$$

3. Для каждого фрейма $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ однозначно определен так называемый канонический дуальный фрейм $\{\varphi_n^*\}_{n=1}^{\infty}$, обладающий свойством экстремальности.

Определение 2. Скажем, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F\backslash\{0\}$ является фреймом в банаховом пространстве F относительного модельного пространства X (фреймом в F относительно X), если существуют постоянные $A, B, 0 < A \leq B < \infty$, такие, что для любого непрерывного линейного функционала $g \in G$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{\langle\varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_G \leq \|\{\langle\varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \leq B\|g\|_G.$$

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм в F относительно X. Тогда для любого вектора $f \in F$ существует числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, такая, что

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n.$$

Теорема 2. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм в F относительно X. Тогда для существования линейного алгоритма разложения по фрейму $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ необходимо и достаточно, чтобы этот фрейм являлся проекционным.

Пример. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система Шаудера. Заметим, что если классическую систему Шаудера нормировать в пространстве $L[0,1]$, то получим рассмотренную в примере 1 систему сжатий и сдвигов функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 1/2], \\ 2(1-t), & t \in [1/2, 1], \\ 0, & t \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Ульяновым, в частности, показано, что система Шаудера является системой представления в пространстве $L_p[0,1], 1 \leq p < \infty$. Значит, по предложению 1 система Шаудера образует фрейм в $L_p[0,1]$ относительно своего пространства коэффициентов X_Φ.

Определение 3. Скажем, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — квантовый фрейм, если существуют $\lambda_n > 0, n \in N$, такие, что для любого вектора $f \in F$ найдется последовательность целых чисел $\{m_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ для которой $\{\lambda_n m_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n m_n \varphi_n.$$

Множество всех таких последовательностей $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ назовем *спектором* квантового фрейма и будем обозначать $Sp(\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty})$. Наконец, если $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ —

некоторое семейство фреймов, то его спектр $Sp(\Phi)$ определим как пересечение всех спектров фреймов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Понятно, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — квантовый фрейм в том и только том случае, когда $\{\lambda_n\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система представления с целыми коэффициентами. Однако нам удобнее считать систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ фиксированной.

Вторая глава«Проекционные фреймы» посвящена рассмотрению определения проекционного фрейма и условий при которых фрейм будет являться проекционным.

Определение 4. Фрейм $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в F относительно X назовем проекционным, если существуют объемлющее банахово пространство $\mathcal{F} \supset F$, в котором F содержится в качестве замкнутого подпространства, базис $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства $\mathcal{F}$, пространство коэффициентов X_ψ которого совпадает с модельным пространством X фрейма Φ, и непрерывный линейный проектор $P : \mathcal{F} \in F$ из $\mathcal{F}$ на F, такие, что

$$\varphi_n = P\psi_n, n = 1, 2, ...$$

Теорема 3. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фрейм в F относительно X. Тогда $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является проекционным фреймом в том и только том случае, когда N является дополняемым подпространством пространства X.

Третья глава «Алгоритм разложения по фрейму» описывает алгоритм разложения по фрейму.

Пусть $\varphi \in L^1[0,1]$ и $\int_0^1 \varphi(t)\,dt = 1$. Аффинной системой типа Хаара или системой сжатий и сдвигов функции $\varphi(t)$ называется последовательность функций

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 2^k\varphi(2^k t - j), & t \in [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}], \\ 0, & t \in [0,1] \setminus [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}], \end{cases}$$

где $n = 2^k + j$, $k = 0, 1, \ldots$ и $j = 0, \ldots, 2^k - 1$.

Для всех $g \in L^\infty[0,1]$ выполняется предельное соотношение

$$\liminf_{k\to\infty} \max_{2^k \le n < 2^{k+1}} |(g, \varphi_n)| \ge \|g\|_\infty,$$

откуда следует, что аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует фрейм в $L^1[0,1]$ относительно модельного пространства ℓ^1. В частности, для всех $f \in L^1[0,1]$ справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} l_n\varphi_n, \qquad \{l_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1. \tag{1}$$

Однако, не существует непрерывных линейных функционалов $l_n = l_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$, $f \in L^1[0,1]$, для которых имеет место (1). Тем не менее, при выполнении следующих дополнительных условий на функцию φ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\log_2 n)\omega(1/n,\varphi)}{n} < \infty, \qquad \|\varphi - \chi_{[0,1]}\|_{A(L^1)} < 1, \tag{2}$$

аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фреймом в $L^1[0,1]$ относительно некоторого более широкого модельного пространства $X \supset \ell^1$ и для такого аффинного фрейма (заведомо неединственные) коэффициенты фреймого разложения могут быть выбраны непрерывно и линейно зависящими от $f \in L^1[0,1]$. В (2) полагаем, что $\omega(\delta,\varphi)$, $0 \le \delta \le 1$, — интегральный модуль непрерывности в L^1 функции φ и $A(L^1)$ — пространство абсолютно сходящихся в L^1 по пачкам рядов Фурье–Хаара.

Значения соответствующих функционалов $l_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$, находятся с помощью следующего алгоритма. Приведем линейный алгоритм аффинного синтеза по аффинной системе $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ [1].

Входными данными являются:

- порождающая функция $\psi \in L^1$ аффинной системы;

- суммируемая функция f, которую требуется представить в виде ряда по аффинной системе посредством производящей формулы $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n(f)\psi_n$.

Первый шаг: образуем числовую последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ по следующим формулам:

$$u_0 = \int\limits_0^1 \psi(x)dx = 1, u_n = \int\limits_{2^{-k}j}^{2^{-k}(j+1/2)} \psi(x)dx - \int\limits_{2^{-k}(j+1/2)}^{2^{-k}(j+1)} \psi(x)dx$$

, где $n = 2^k + j$ - стандартное представление числа $n \in N$.

Второй шаг: исходя из полученной последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ строим новую числовую последовательность $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ с использованием рекуррентных соотношений

$$v(a_1,...,a_k) = -u(a_1,...,a_k) - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{a_\nu} u(a_1,...,a_{\nu-1})v(a_{\nu+1},...,a_k).$$

Третий шаг: он заключается в построении числовой последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ по функции f.

И, наконец, на четвертом шаге остается получить на выходе последовательность значений функционалов $\{l_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ по формулам

$$l_1(f) = f_0, l_{2n}(f) = -l_{2n+}(f) = \frac{1}{2}(f_n + v_n f_0), n = 1, 2, ...$$

В заключении подведены итоги работы: что было сделано и достигнуто.

В приложении представлена реализация алгоритма разложения по фреймам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе магистерской работы были рассмотрены:

1) задача квантования коэффициентов приближающих полиномов, которая решается для аффинных фреймов;

2) задача о квантовании коэффициентов разложения по фрейму;

3) задача аффинного синтеза, т.е. задача о представлении функций рядами по элементам аффинной системы.

Также реализован алгоритм разложения по аффинному фрейму.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Duffin, R.J., Schaeffer, A.C. A class of nonharmonic Fourier series / Trans. Amer. Math. Soc., 1952. № 72. С. 341-366.

2 Малла, С. Вэйвлеты в обработке сигналов / М.: Мир, 2005.

3 Daubechies, I. Ten Lectures on Wavelets / Philadelphia: SIAM, 1992.

4 Chui, C. An Introduction to Wavelets / Academic Press, 1992.

5 Blatter, C. Wavelets: A Primer / CRC Press, 2002.

6 Наймарк, М. А. Спектральные функции симметрического оператора / М. А. Наймарк // Изв. АН СССР, сер. матем., 1940. Т. 4, № 3. С. 277–318.

7 Casazza,P. G., Han, D., Larson, D. R. Frames for Banach spaces / Contemp. Math., 1999. № 247. С. 149–182.

8 Кашин, Б. С., Куликова, Т. Ю. Замечание об описании фреймов общего вида / Матем. заметки, 2002. Т. 72, № 6. С. 941–945.

9 Ульянов, П. Л. Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ / УМН, 1972. Т. 27, № 2. С. 3–52.

10 Young, R. M. An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York, 1980.

11 Christensen, O. An Introduction to Frames and Riesz Bases, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhauser, Boston, MA, 2003.

12 Новиков,И. Я., Протасов,В. Ю., Скопина, М. А. Теория всплесков / Физматлит,М., 2005.

13 Лукашенко, Т. П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам / Вестн. Моск. ун-та, 2001. № 1. С. 6–10.

14 Casazza, P. G., Dilworth, S. J. Coefficient quantization for frames in Banach spaces / P. G. Casazza, S. J. Dilworth, E. Odell, Th. Schlumprecht , A. Zsak // J. Math. Anal. Appl., 2008. № 348. С. 66–86.

15 Терехин, П. А. Банаховы фреймы в задаче аффинного синтеза / П. А. Терехин // Матем. сб., 2009. Т. 200, № 9. С. 127–146.

16 Терехин, П. А. Фреймы в банаховом пространстве / П. А. Терехин // Функц. анализ и его прил., 2010. Т. 44, № 3. С. 50–62.

17 Терехин, П. А. Линейные алгоритмы аффинного синтеза в пространстве Лебега L^1 [0,1] / П. А. Терехин // Изв. РАН. Сер. матем., 2010. Т. 74, № 5. С. 115-144.

18 Бояркина И.А., Терехин П.А. Численная реализация алгоритма разложения по аффинному фрейму / Современные методы теории краевых задач: материалы международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения - XXVIII"(3-9 мая 2017 г.) - Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2017. С. 44-46.

19 Han, D., Larson, D. R. Frames,bases and group representations / Memoirs Amer. Math. Soc., 147:697, 2000. С. 1–91.

20 Терехин, П.А. Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов / П. А. Терехин // Изв. вузов, матем., 1999. № 8. С. 74–81.