Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ СТРАХОВЫМИ ТАРИФАМИ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Василенко Марины Александровны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент __________________ С.В. Тышкевич

Зав. кафедрой
зав. кафедрой, д.ф.-м.н., доцент __________________ С.П. Сидоров

Саратов 2017

Введение. Страховой тариф является нормативом, определяющим размер страховой платы, и играет ключевую роль в финансово-экономических отношениях страхователя и страховщика. В условиях конкуренции задача страховых компаний состоит в формировании страховых тарифов, учитывающих уровень риска. Модель аккумуляции в свою очередь выражает функцию распределения совокупного страхового риска, принятого на удержание страховой компанией.

Существующие методики расчёта страховых тарифов традиционно ориентированы на страховые риски с отсутствием эффекта кумуляции. Поэтому как с методической, так и с практической точки зрения представляется важным распространение на кумулирующие риски методики, основанной на использовании модели аккумуляции. Аналогичная ситуация обстоит и при страховании имущественных рисков в объектах с изменяющейся во времени страховой суммой. Система компьютерной математики Matlab позволяет получить практическое решение описанных задач, используя стандартные функции.

Магистерская работа содержит три раздела, которые посвящены изучению методики расчёта страховых тарифов и реализации этих методов в страховании. В первом разделе даётся представление о типовой методике решения задач, связанных с управлением процессами рискового страхования, посвящён построению алгоритма численной реализации модели аккумуляции в системе компьютерной математики Matlab с использованием встроенных функций. Во втором разделе рассматривается методика расчёта страховых тарифов при страховании кумулирующих имущественных рисков, а именно моделирование эффекта кумуляции страхового риска и алгоритмы расчёта страхового тарифа для кумулирующих рисков, а также представлен расчёт страховых тарифов с эффектом кумуляции в системе компьютерной математики Matlab. В третьем разделе рассматривается теоретическое и практическое обобщение методики расчёта страховых тарифов на группу объектов с изменяющейся во времени страховой суммой.

Matlab — это высокоуровневый язык технических расчетов, интерактивная среда разработки алгоритмов и современный инструмент анализа данных. Обширная библиотека функций упрощает работу пользователей. Matlab позволяет на порядок сократить время решения типовых задач и значительно упрощает разработку новых алгоритмов.

Цели данной работы:

1. Рассмотрение методов решения основных задач, связанных с управлением процессами рискового страхования;
2. Построение алгоритмов численной реализации разработанных математических моделей и программ в системе компьютерной математики Matlab с использованием встроенных функций.

Основное содержание работы. Предположим, что актуарию доступна статистическая информация следующего вида: в результате наблюдения за группой из N_0 однородных объектов на некотором интервале времени T каждому из одинаковых по продолжительности интервалов времени $\Delta t = t_i - t_{i-1} (i = 1,2, \dots n)$ поставлены в соответствие число страховых событий m_i и значения страховых ущербов по множеству страховых случаев $X_i^{(v)}$ $(v = 1,2, \dots m_i)$.

Обратимся к задаче *моделирования совокупного страхового риска* при страховании N объектов, где $N \neq N_0$. Допустим, что удалось найти вероятности $p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, \dots p_k^{(0)} \dots$ того, что на годовом интервале времени произошло $0, 1, 2, 3 \dots . k \dots$страховых событий. Тогда если $F_0(x)$ есть функция распределения страхового ущерба в единичном страховом событии, то функция распределения суммы k независимых одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых описывается функцией распределения $F_0(x)$, выражается k-кратной сверткой этой функции

$$P\{W < x|k\} = F^{(k)}(x) = (*)^k F_0(x). \qquad (k = 2,3, \dots) \qquad (1)$$

Поскольку распределение вероятностей $p_k^{(0)}$ $(k = 1,2,3, \dots)$ подчиняется условию нормированности

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(0)} = 1,$$

то для вычисления функции распределения совокупного страхового ущерба на годовом интервале времени можно применить формулу полной вероятности

$$R_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(0)} P\{W < x|k\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(0)} F^k(x). \qquad (2)$$

Полученная формула в актуарной математике известна под названием «*модель аккумуляции*» [1].

Путь преодоления вычислительных трудностей при численной реализации модели аккумуляции (2) состоит в выборе такой аппроксимации функции распределения страхового ущерба в единичном страховом событии $F_0(x)$, которая позволила бы избежать необходимости определения сверток численными методами. Такой аппроксимацией распределения $F_0(x)$ является гамма-распределение с плотностью вида

$$p_\gamma(x|\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, \ x \leq 0; \\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \ x > 0, \end{cases} \qquad (3)$$

которая позволяет в аналитической форме вычислять свертки этого распределения.

С учетом свойства замкнутости по операции свертки гамма-распределения *модель аккумуляции* записывается в виде

$$R(x) = p_0 h(x) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \, F_\gamma(x|k\alpha,\beta), \qquad (4)$$

где $h(x)$ — функция Хевисайда, $F_\gamma(x|k\alpha,\beta)$ — функция распределения совокупного страхового ущерба в результате наступления k страховых событий при условии, что страховой ущерб в одном страховом событии $F_0(x)$ описывается гамма-распределением по формуле [2]

$$F_\gamma(x|\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ \int_0^x p_\gamma(y|\alpha,\beta)dy, \ \ x > 0, \end{cases} \tag{5}$$

Эффект кумуляции риска подразумевает ситуации, когда страховое событие с одним объектом провоцирует наступление ущерба другим объектам. В итоге множественный характер страховых ущербов в результате единичного удара влечет за собой увеличение страховых выплат со стороны страховщика, следовательно, и увеличение страховых тарифов.

Для описания совокупного страхового ущерба по группе застрахованных объектов в условиях кумуляции риска с помощью формулы (4) необходимо построить соответствующий алгоритм вычисления вероятностей p_k .

Существует два варианта возможного учёта воздействия инициирующего фактора на страхуемые объекты при построении алгоритма расчёта p_k $(k =$

$= 0,1,2,\dots)$. В первом случае соответствующая модификация распределения Пуассона, описывающего появление случайного числа инициирующих факторов, приводит к использованию составного распределения Пуассона, а в частном случае — к двойному распределению Пуассона. Во втором случае модификация распределения Пуассона приводит к появлению отрицательного биномиального распределения.

В работе приведён пример расчёта страхового тарифа при страховании имущества однородных технических комплексов, находящихся в зоне повышенной сейсмической опасности, и полученные результаты расчетов показали, что применение распределения Пуассона для расчёта премий заведомо кумулирующих рисков даёт заниженный больше чем на 22% результат по сравнению с применением отрицательного биномиального или двойного пуассоновского распределений.

В ходе работы получен вывод, что комбинированная схема использования двойного пуассоновского и отрицательного биномиального распределений будет наиболее перспективной:

– наглядность, благодаря двойному пуассоновскому распределению, которое позволяет активно участвовать эксперту на стадии формирования исходных данных и коррекции модели кумулирующего риска путём оценки или задания параметров η_0 и η_1,

быстрота вычислений: отрицательное биномиальное распределение обеспечивает эквивалентность расчётов кумулирующих рисков в терминах данного распределения при соблюдении условий $m_{nbn} = \eta_0 \cdot \eta_1$ и $D_{nbn} = \eta_0 \cdot \eta_1 \cdot (\eta_1 + 1)$ [3].

В ряде видов имущественного страхования при заключении страхового договора страховщик имеет дело с объектами, страховая стоимость которых изменяется на интервале действия этого договора. Поскольку при этом момент наступления страхового случая является случайной величиной, то и размер страховой суммы, которая определяет значение возмещаемого страхового ущерба, также оказывается величиной случайной, даже если исходная зависимость страховой суммы от времени задается в виде детерминированной функции. Такая ситуация, в частности, возникает при страховании строительно-монтажных рисков, когда стоимость возводимого объекта возрастает по мере завершения строительства и оснащения его соответствующим оборудованием.

Расчёт страховых тарифов при страховании объектов с изменяющейся во времени страховой суммой предполагает двухэтапное решение задачи: на первом этапе решается параметрическая задача определения условной функции распределения совокупного страхового возмещения при варьируемой величине страховой ответственности, на втором — моделирование распределения страховой ответственности в момент наступления страхового события и вычисление безусловной функции распределения совокупного страхового ущерба с учётом случайного характера величины страховой ответственности в момент возможного страхового события.

В ходе работы получены результаты, подтвержденные практическими построениями: значение нетто-ставки страхового тарифа, соответствующего условиям конкретного договора, в точности совпадает с величиной базового страхового тарифа.

Расчёт страховой премии по конкретному договору может выполняться в следующем виде: для рассматриваемого договора в соответствии с процедурой, описанной в работе, устанавливается величина договорной страховой ответственности $S_{dog}(\theta, v)$, согласованная со страхователем и используется для вычисления договорной брутто-премии [2]

$$Pr_{br}(\theta, v) = \bar{T}rbrS_{dog}(\theta, v), \qquad (6)$$

где $\bar{T}rbr$ — базовая брутто-премия.

Заключение. В условиях конкуренции потребность в принятии оптимальных решений страховыми компаниями служит мощным стимулом к развитию прикладных методов актуарной математики. Поэтому задача состоит в формировании страховых тарифов, учитывающих уровень риска.

В настоящей работе были описаны методические аспекты расчёта страховых тарифов с отсутствием и наличием эффекта кумуляции, изменения во времени страховой суммы, моделирование совокупного страхового риска (модели аккумуляции), которые являются базисом работы андеррайтера.

Также была приведена реализация модели аккумуляции с помощью пакета Matlab, в которой описан алгоритм идентификации страхового риска, и рассмотрен расчёт страховых тарифов при страховании кумулирующих имущественных рисков и при страховании имущественных рисков в объектах с изменяющейся во времени страховой суммой**.**

Кумуляция страхового риска должна учитываться в актуарных расчётах, так как игнорирование эффекта кумуляции может привести к ошибкам в оценке страхового риска и к занижению оценки страхового ущерба, возмещаемого страховой компанией.

Результаты первого и второго разделов докладывались на Международной молодежной научно-практической конференции и опубликованы в сборниках.

Список использованных источников.

1. Штрауб, Э. Математика имущественного страхования / Э. Штрауб. М. : Изд-во «Анкил», 2000. С. 150.
2. Иванов, С.С. Теория и практика рискового страхования / С.С. Иванов. М. : РОСНО, Анкил, 2007. С. 480.
3. Василенко, М.А. Методика расчета страховых тарифов / Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками: материалы V Междунар. Молодежной науч.- практ. конф. / под ред.: В.А. Балаша, С.П. Сидорова, С.И. Дудова. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2016. С. 20-25.