Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 218 группы
направления 01.4.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Просвириной Светланы Михайловны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ____________ М. Г. Плешаков

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н. ____________ С. П. Сидоров

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Рынок ценных бумаг играет важную роль в экономике любой страны. Возможности рынка ценных бумаг привлекают все больше и больше инвестиций в эту сферу рыночной экономики. В связи с этим актуальным становится анализ и прогнозирование возможной прибыли и рисков, понесенных инвестором при управлении им портфелем ценных бумаг.

Портфельная теория впервые рассматривалась в работах Гарри Марковица [1], Вильяма Шарпа [2], Джона Линтнера [3]. Основной смысл теории заключался в противоречащих друг другу целях: максимизации доходности и минимизации риска. Соотношение риск-доходность показывает, какой уровень риска инвестор готов допустить ради определенного уровня доходности. Чем больше доходность инвестиций, тем больше, соответственно, и риск, а значит, чтобы получить высокий доход, инвестор должен принимать и высокий уровень риска. Понятие оптимального портфеля появилось в 1950-е годы одновременно со становлением теории портфельного инвестирования. Оптимальный портфель можно определить следующим образом:

- портфель, максимизирующий предпочтения инвестора в отношении доходности и риска;
- эффективный портфель, которому инвестор отдает предпочтение, поскольку показатели риска и доходности этого портфеля приближены к функции полезности инвестора.

В данной работе рассмотрены проблемы составления и управления инвестиционными портфелями ценных бумаг. Оптимизационные стратегии основаны на построении экономико - математических моделей портфеля. Одна из проблем заключается в том, что процесс выбора инвестиционной стратегии далеко не всегда можно адекватно формализовать, иногда более существенное значение имеют не количественные, а качественные показатели. Поэтому в настоящее время помимо традиционных методов оптимизации (например, линейного или динамического программирования) менеджеры и аналитики используют методы, основанные на генетических алгоритмах, нечеткой логике, а также экспертные системы, нейронные сети. Результатом работы является программа для автоматизации процесса оптимизации портфеля ценных бумаг на основе генетического алгоритма.

Структурно данная работа состоит из введения, заключения, приложения и четырех глав.

В первом разделе "Портфель ценных бумаг"рассмотрены теоретические основы финансовых инвестиций. Приведены три стратегии управления портфелем ценных бумаг:

1. активная стратегия;
2. пассивная стратегия;
3. сбалансированная стратегия.

Во втором разделе "Классические математические методы оптимизации"сделан обзор оптимальных портфелей и классических методов их оптимизации.

В третьем разделе "Эвристические математические методы оптимизации"рассматриваются эвристические алгоритмы для портфеля Марковица с ограничением на кардинальность.

Четвертый раздел "Решение задачи оптимизации портфеля на основе конкретных данных"посвящен тестированию разработанной программной системы. Описаны результаты, которые получились при изменении тех или иных параметров.

Портфель ценных бумаг. В сложившейся мировой практике фондового рынка под инвестиционным портфелем понимается некая совокупность ценных бумаг, принадлежащих физическому или юридическому лицу, выступающая как целостный объект управления. Это означает, что при формировании портфеля и в дальнейшем изменяя его состав и структуру, управляющий формирует новое инвестиционное качество с заданным соотношением – риск/доход. Однако новый портфель представляет собой определенный набор из корпоративных акций, облигаций с различной степенью обеспечения и риска и бумаг с фиксированным доходом, гарантированным государством, т. е. с минимальным риском потерь по основной сумме и текущих поступлений. Смысл портфеля – улучшить условия инвестирования, придав совокупности ценных бумаг такие инвестиционные характеристики, которые недостижимы с позиции отдельно взятой ценной бумаги и возможны только при их комбинации.

С учетом инвестиционных качеств ценных бумаг можно сформировать различные портфели ценных бумаг, в каждом из которых будет собственный баланс между существующим риском, приемлемым для владельца портфеля, и ожидаемой им отдачей (дохода) в определенный период времени. Соотношение этих факторов и позволяет определить тип портфеля ценных бумаг.

Под управлением инвестиционным портфелем понимается применение к совокупности различных видов ценных бумаг определенных методов и технологических возможностей, которые обеспечивают:

— сохранение первоначально вложенных средств;
— достижение максимального возможного уровня доходности;
— инвестиционную направленность портфеля;
— снижение уровня риска.

Иначе говоря, процесс управления направлен на сохранение основного инвестиционного качества портфеля и тех свойств, которые бы соответствовали интересам его владельца. Поэтому необходима текущая корректировка структуры портфеля на основе мониторинга факторов, которые могут вызвать изменение в составных частях портфеля.

Совокупность применяемых к портфелю методов и технических возможностей представляет собой методы управления портфелем, которые могут быть охарактеризованы как *активный, пассивный* или *сбалансированный*.

Классические математические методы оптимизации. Пусть на рынке действуют различные ценные бумаги с доходностями m_i и эффективностями R_i, $i = 1, \dots, n$.

Инвестор покупает ценных бумаг всех видов, причем на i-ый вид ценной бумаги тратится x_i доля капитала. Набор ценных бумаг называется портфелем ценных бумаг. По определению

$$x_1 + \dots + x_n = 1. \tag{1}$$

Доходность портфеля

$$R_p = x_1 R_1 + \dots + x_n R_n.$$

Эффективность

$$m_p = E(R_p) = E(x_1 R_1 + \dots + x_n R_n) = x_1 E(R_1) + \dots + x_n E(R_n) = x_1 m_1 + \dots + x_n m_n. \tag{2}$$

Риск портфеля:

$$\nu_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \nu_{ij} x_i x_j. \tag{3}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\nu_p}. \tag{4}$$

Модель Марковица полностью описывается формулами (1)-(4).

Запишем формулы компактно. Для этого введем в рассмотрение векторы x, m, e и матрицу V.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_n \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_{ij} \end{pmatrix},$$

Теперь перепишем формулы (1)-(3):

$$(e, x) = 1. \tag{5}$$

$$(m, x) = m. \tag{6}$$

$$(Vx, x) = v. \tag{7}$$

Портфель для осторожного инвестора. Такой инвестор готов ограничиться заранее заданной эффективностью портфеля, но при этом добивается минимального риска.

$$\begin{cases} (Vx, x) \to \min, & (8) \\ (m, x) = const, & (9) \\ (e, x) = 1, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Получим задачу квадратичного программирования, которая решается симплекс-методом.

Решение такого рода задач основано на теореме условной минимизации:

Теорема 1 (необходимое условие условного минимума). *1. Пусть функции $f(x), \phi_i(x),\ i = 1, \ldots, m$ — дифференцируемые;*

2. Рассматривается задача условной минимизации

$$f(x) \to \min \tag{10}$$

при условии

$$\left.\begin{aligned} \phi_1(x) = 0 \\ \ldots \\ \phi_p(x) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} \phi_{p+1}(x) \geq 0 \\ \ldots \\ \phi_m(x) \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

3. Пусть x^* — решение (10)-(12), причем градиенты активных в этой точке ограничении линейно независимы $\{\phi_I(x^*)\}_{i \in I(x^*)}$, где $I(x^*)$ — номера в *которых ϕ_i обращается строго в 0.*

Тогда существуют λ_i, $i \in I(x^*)$ — множители Лагранжа, что

1. $\lambda_i \geq 0$, $i \geq p+1$
2. $$f'(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \phi_i'(x^*). \tag{13}$$

Применим теорему к решению задачи составления портфеля для осторожного инвестора при разрешении спекуляции. Запишем задачу в стандартной форме:

$$f(x) = (Vx, x)$$

при ограничениях

$$\phi_1 = (m, x) - m_p = 0$$

$$\phi_2(x) = (e, x) - 1 = 0.$$

Т.к. у нас 2 равенства, то и коэффициентов будет два:

$$f'(x^*) = \lambda_1 \phi_1'(x^*) + \lambda_2 \phi_2'(x^*),$$

$$\phi_1'(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, \\ \dots \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_, 1 \\ \dots \\ m_n \end{pmatrix} = m,$$

$$\phi_2'(x^*) = e,$$

$$f'(x) = 2\nu x.$$

По теореме ϕ_1' и ϕ_2' должны быть линейно независимыми, т.е. существует k: $m = ke$. Таким образом $m_1 = m_2 = \dots = m_n$. Следовательно, для линейной независимости необходимо, чтобы эффективности хотя бы двух видов ценных бумаг отличались друг от друга. Тогда получаем уравнения:

$$\begin{cases} 2Vx^* = \lambda_1 m + \lambda_2 e, \\ (m, x^*) = m_p, \\ (e, x^*) = 1. \end{cases} \tag{14}$$

Получили $n+2$ уравнений с $n+2$ неизвестными λ_1, λ_2, x^*

$$x^* = \frac{\lambda_1}{2}\nu^{-1}m + \frac{\lambda_2}{2}V^{-1}e. \tag{15}$$

Преобразуем 3-е уравнение системы (14): $(V^{-1}m,)\lambda_1 + (V^{-1}e,) = 2.$

Введем обозначения:

$$a_{11} = (V^{-1}m, m)a_{12} = (V^{-1}e, m),$$

$$a_{21} = (V^{-1}m, e)a_{22} = (V^{-1}e, e).$$

Тогда наша система запишется в виде:

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 = 2 \cdot m_p, & (16)\\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 = 2. & (17) \end{cases}$$

Алгоритм расчета оптимального портфеля.

1. Рассчитываем коэффициенты a_{ij}.
2. Составляем систему линейных уравнений (5)-(6) относительно λ_1, λ_2.
3. Решаем методом Гаусса и находим λ_1, λ_2.
4. Подставляем найденные λ_1, λ_2 в формулу (15) и находим вектор x^*.
5. Рассчитываем вариацию портфеля: $\nu_p = (Vx^*, x^*)$ и среднеквадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{\nu_p}$.

Оптимальный портфель рискового инвестора. Математическая модель:

$$\begin{cases} (m, x) \to \max, & (18)\\ (Vx, x) = \nu_p, & (19)\\ (e, x) = 1, & (20)\\ x \geq 0, & (21) \end{cases}$$

Выражения (18), (19) показывают, что инвестор стремиться максимизировать свой доход и готов ради этого идти на определенный риск.

Решение задачи (18)-(20) может содержать отрицательные доли, что интерпретируется, как взятие ценной бумаги в долг, т.е. спекуляцию). Неравенство (21) спекуляцию запрещает.

Рассмотрим решение задачи составления оптимального портфеля (18)-(20).

Запишем в виде

$$f(x) = -(m, x) \to \min$$

Условия

$$\begin{cases} \phi_1(x) = (Vx, x) - \nu_p = 0, \\ \phi_2(x) = (e, x) - 1 = 0. \end{cases}$$

Теорема может быть применена, если градиенты линейно независимы.

$$\begin{cases} \phi_1'(x) = 2Vx, \\ \phi_2'(x) = e. \end{cases}$$

если $\exists k \notin$, что $2Vx = ke$, то вектора зависимы.

Возникает особый случай. Предположим, что такого k не существует, тогда градиенты линейно независимы и применима теорема о необходимом условии. Из теоремы следует, что существуют два числа λ_1, λ_2, такие, что для решения x^* справедливо равенство:

$$f'(x^*) = \lambda_1 \cdot \phi_1'(x^*) + \lambda_2 \cdot \phi_2'(x^*)$$

или

$$-m = 2\lambda_1 Vx + \lambda_2 e. \tag{22}$$

Решим уравнение относительно x

$$x^* = -\frac{1}{2\lambda_1} V^{-1} m - \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} V^{-1} e. \tag{23}$$

Найдем λ_1 и λ_2. Для этого подставим (23) в (19) и (20). Получим два уравнения для двух неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11} + 2\lambda_2 a_{12} + a_{22} \cdot \lambda_2^2 = 2 \cdot \lambda_1^2 \nu_p, & (24) \\ a_{12} + a_{22}\lambda_2 = -2\lambda_1, & (25) \end{cases}$$

где

$$a_{11} = (m, V^{-1}m) a_{12} = (m, V^{-1}e),$$

$$a_{21} = (V^{-1}m, e) a_{22} = (V^{-1}e, e) a_{12} = a_{21}.$$

Алгоритм расчета.

1. Из уравнения (25) выражаем λ_1 подставляем в уравнение (24). Получаем квадратное уравнение относительно λ_2. Получаем в общем случае два решения: $\bar{\lambda_2}$ и $\tilde{\lambda_2}$.
2. Из уравнения (25) находим $\bar{\lambda_2}$ и $\tilde{\lambda_2}$ (соответственно).
3. Подставляем соответствующие λ и находим из (23) два вектора: $\bar{x}^*$ и $\tilde{x}^*$.
4. Определяем, какой из этих векторов является решением задачи.
5. Находим эффективность портфеля ценных бумаг.
6. Проводим анализ решения.

Эвристические математические методы оптимизации. Рассмотрим модель Марковица, дополненную ограничениями на размер долей, инвестируемых в активы, и ограничением на кардинальность, т.е. на максимальное количество активов в портфеле.

Нам потребуются следующие обозначения:

N — общее число доступных активов;

K — необходимое количество активов в выбранном портфеле;

μ_i — ожидаемая доходность актива $i, i = 1, \dots, N$;

σ_{ij} — ковариация между доходностью от актива i и актива j, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$.

ρ — необходимый уровень ожидаемой доходности;

$l_i(\geq 0)$ — нижнее ограничение на размер доли, инвестируемой в актив $i(i = 1, \dots, N)$, если инвестиции вложены в актив i;

$u_i(\geq 0)$ — верхнее ограничение на размер доли, инвестируемой в актив $i(i = 1, \dots, N)$.

Переменными модели являются:

x_i — доля $(0 \leq x_i \leq 1)$ от общего объема инвестиций, вложенных в актив $i(i = 1, \dots, N)$,

переменная δ_i, равная 1, если актив $i(i = 1, \dots, N)$ включен в портфель, и равная 0 в противном случае.

Генетический алгоритм решения задачи. Генетические алгоритмы (ГА) являются поисковым механизмом, основанным на эволюционных принципах естественного отбора и генетики. Теоретические основы ГА были первоначально разработаны Холландом [4].

Обозначим

$$\Delta_N = \{(\delta_1, \dots, \delta_N) : \delta_i \in \{0, 1\}\},$$

$$\Delta_N(K) = \left\{ \delta \in \Delta_N : \sum_{i=1}^{N} \delta_i = K \right\}.$$

Для $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N) \in \Delta_N$ обозначим

$$S(\delta) = \{ i \in \{1, \dots, N\} : \delta_i = 1 \}$$

и пусть $P(\delta, \rho)$ обозначает следующую задачу квадратичного программирования:

$$\sum_{i \in S(\delta)} \sum_{j \in S(\delta)} \sigma_{ij} x_i x_j \to min \tag{26}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{i \in S(\delta)} \mu_i x_i = \rho, \tag{27}$$

$$\sum_{i \in S(\delta)} x_i = 1, \tag{28}$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i, i \in S(\delta). \tag{29}$$

Обозначим $P_{min}(\delta, \rho)$ решение задачи (27)-(29), т.е. минимальное значение целевой функции (26) в оптимальной точке допустимого множества, определяемого соотношениями (27)-(29).

Если для некоторых δ, ρ допустимое множество задачи $P(\delta, \rho)$ пусто, будем полагать $P_{min}(\delta, \rho) = M$ для некоторого достаточно большого положительного числа M. Обозначим $\Delta_N(K, \rho)$ множество всех тех $\delta \in \Delta_N(K, \rho)$, для которых множество всех $x \in R^K$, удовлетворяющих (27)-(29), не пусто.

Возьмем $\rho \in [\rho_{min}, \rho_{max}]$, где ρ_{min} — есть минимальное значение доходностей активов, ρ_{max} — есть максимальное значение доходностей активов. Работа ГА состоит в выполнении следующих шагов:

1. *Кодирование*. В нашем ГА используется фиксированный размер популяции $P = s^2$ портфелей, s есть некоторое натуральное число. Элементами популяции (особями) будут $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N) \in \Delta_N(K)$.
2. *Генерация начальной популяции* $\Delta^2_{N,P}(K)$ происходит путем случайного выбора P элементов из элементов множества $\Delta_N(K, \rho)$. Отметим, что для непустоты решения задачи $P(\delta, \rho)$ необходимо включения как ча-

сти активов, имеющих доходность, более высокую, чем ρ, так и части активов с доходностью меньшей, чем ρ. Для отсечения заведомо недопустимых элементов популяции мы использовали соответствующую маску.

3. *Отбор*. Для каждого элемента $\delta \in \Delta^{(j)}_{N,P}(K)$ текущей j-й популяции решается оптимизационная задача $P(\delta, \rho)$ и находится соответствующее значение $P_{min}(\delta, \rho)$. Портфели сортируются в порядке увеличения риска (дисперсии) и берутся первые $2s$ элементов этого упорядоченного списка, чтобы на их основе составить новую популяцию для следующего поколения, т.е. выбираем $2s \ll P$ элементов текущей j-й популяции $\Delta^{(j)}_{N,P}(K)$ с наименьшим значением $P_{min}(\delta, \rho)$. Обозначим A_j множество особей, полученных в результате отбора на шаге j. Отберем случайным образом s элементов множества A_j и обозначим получившееся множество $A_{1,j}$. Множество остальных элементов обозначим $A_{2,j}$.
4. *Скрещивание*. Каждой паре элементов $(\varepsilon, \delta), \varepsilon \in A_{1,j}, \delta \in A_{2,j}$, ставиться в соответствие элемент (потомок) γ по следующим правилам:
   а) если $\varepsilon_i = 1$ и $\delta_i = 1$ (т.е. актив присутствует в обоих родительских портфелях), то $\gamma_i = 1$ (он присутствует и в потомке);
   б) если $\varepsilon_i = 0$ и $\delta_i = 0$ (актив отсутствует в обоих родительских портфелях), то $\gamma_i = 0$ (он отсутствует и в потомке);
   в) если $\varepsilon_i + \delta_i = 1$ (актив присутствует только в одном из родительских портфелей), то его присутствие (или отсутствие) в потомке будет решено на основе случайного выбора так, чтобы $\sum_i \gamma_i = K$.

   В результате скрещивания получаем $P = s^2$ потомков.
5. *Мутация* является стандартной для ГА и представляет собой степень случайного изменения элементов с низкой вероятностью. В рассматриваемом ГА потомок подвергается мутации с вероятностью α посредством случайного выбора одного актива в портфеле-потомке и замены его случайным активом, не представленным в портфеле-потомке, а также в родительских портфелях. Нужно отметить, что нельзя гарантировать, что в результате мутации получится потомок, имеющий допустимое решение задачи (27)-(29), т.е. возможно, что не существует допустимого потомка для некоторых родителей после скрещивания и мутации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вопросы, рассмотренные в данной, работе касаются одной из основных сфер современной экономики: корпоративных финансов, т.е. системы формирования и использования денежных потоков на предприятии. И ценные бумаги, находящиеся в портфелях корпораций, составляют один из наиболее значимых ресурсов формирования капитала корпорации (как собственного, путем эмиссии акций, так и заемного, путем выпуска облигационных займов). Была изучена предметная область, связанная с оптимизацией портфеля ценных бумаг. Были рассмотрены существующие на данный момент времени методы решения задач, связанных с оптимизацией портфеля ценных бумаг.

Идеальной теории построения портфеля не существует, но если воспользоваться инструментарием всех теорий сразу (из теории Марковитца целесообразно взять метод определения внутренних потенциалов роста бумаги, а также теорию эффективного множества, теория Шарпа помогает учесть риск бумаги и тем самым составить портфель с желаемым риском, из теории выровненной цены можно взять пофакторный анализ изменения котировки ценной бумаги), то вероятность построения наиболее эффективного портфеля резко возрастает.

Но мало составить портфель ценных бумаг, для поддержания его эффективности им необходимо управлять и управлять достаточно агрессивно, т.е. необходимо постоянно проводить анализ представленных на рынке ценных бумаг с целью выявления таких бумаг обладание которыми принесет максимальную выгоду владельцу портфеля. Но при этом необходимо ограничивать риск возможных потерь и сдерживать желания изменить структуру портфеля ради самого факта изменения. Но и держать портфель в полной стабильности не имеет большого смысла, так как изменчивость рынка может в одночасье превратить стоимость портфеля в ничто. Поэтому, с экономической точки зрения, наиболее эффективным представляется сбалансированный метод управления портфелем, в котором потенциальные риски ограничены "базой а потенциальные прибыли безграничны.

С математической точки зрения, эвристические методы становятся все более популярными по сравнению с альтернативными традиционными методами оптимизации. Наличие недетерминированных элементов дает возможность легче преодолевать локальные минимумы. Кроме того перезапуск алгоритма не обязательно приводит к одному и тому же результату, если поиск сходится к локальному оптимуму в первый раз, то при другом запуске может определиться другой оптимум — в идеале глобальный. Все эти качества дают возможность использовать эвристические методы для широкого класса задач.

В данной работе был предложен отличный от традиционного механизм применения основных операторов генетического алгоритма, который минимизирует случайность оператора отбора.

Также была приведена реализация программы для автоматизации процесса оптимизации портфеля ценных бумаг с использованием генетического алгоритма, которая обеспечивает:

1. импорт котировок акций из файла Excel, либо занесение данных непосредственно в таблицу, расположенную в главном окне программе,
2. выбор основных параметров генетического алгоритма(численность популяции, количество поколений, вероятность мутации),
3. визуализацию результатов работы генетического алгоритма в виде таблицы,
4. возможность выбора пользователем акций для портфеля ценных бумаг, который оптимизируется.

Проведен анализ эффективности генетического алгоритма от размера популяции и вероятности мутации и скрещивания.

Разработанная программа позволяет непрофессиональным игрокам на рынке бумаг, не имея специальных знаний, сформировать оптимальный портфель ценных бумаг и тем самым уменьшить риск инвестиций в ценные бумаги.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Markowitz H.M. Portfolio selection / J. Finance. 1952. Vol. 7, no. 1. P. 452-442.

2 Sharpe W. F. Capital asset prices : A theory of market equilibrium under conditions of risk / J. of Finance. 1964. Vol. 19, no. 3. P. 425-442.

3 Lintner J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets / Review of Economics and Statistics. 1965. Vol. 47, no. 1. P. 13-37.

4 Holland J.H. Adaptation in Natural and Artificial Systems : An Introductory Analysis With Application to Biology, Control, and Artifical Intelligence. Ann Arbor : University Press, 2003.