Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

СТРАХОВАНИЕ ГРУППЫ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ЛИЦ
АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Пужаевой Марии Анатольевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ____________________ М.Г. Плешаков

Зав. кафедрой
д. ф.-м. н. ___________________ С.П.Сидоров

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Страхование — сложный и многоуровневый процесс, требующий научного обоснования и управления, без которого у страховой компании могут возникнуть финансовые проблемы. Это достигается разными средствами и инструментами — маркетинговыми, финансовыми, юридическими и иными. Ключевое место среди указанных инструментов занимают методы актуарного анализа. Актуарный анализ представляет собой специфическую функцию страховщика, направленную на научное обоснование страховых и смежных операций на основе методов экономико-математического моделирования. При этом он использует не только количественные оценки, на которые изначально ориентирован, но и качественную информацию о рисках, особенностях дизайна страхового продукта и закономерностях развития страховых рынков.

Целью данной магистерской работы является рассмотрение и изучение такого специального направления актуарно-финансовой деятельности как страхование группы лиц с различными дополнительными условиями, которые накладываются на структуру выплат в данной группе и на типы страховых договоров членов групп.

Магистерская работа состоит из четырёх частей: страхование с учетом и без учета очередности выбытия, вероятностная интерпретация актуарных оценок для страхования нескольких лиц и нахождение оптимальной стратегии резерва. Примерами страхования групп взаимосвязанных лиц без учета очередности выбытия могут служить страхование на случай первой или последней смерти в группе, которые могут рассматриваться как в модели с дискретным временем, так и в модели с непрерывным временем. Мы также можем вводить числа для расчета настоящих стоимостей аннуитетов и страхового обеспечения по договорам страхования жизни нескольких взаимосвязанных лиц, так называемые коммутационные числа. Во второй главе рассматривается страхование с учетом очередности выбытия, а именно оценку обязательств на случай первой и последней смерти. При таком страховании страховой случай возникает тогда, когда выбытие из группы взаимосвязанных лиц происходит в определенном порядке. В третьей главе рассматривается страхование нескольких лиц без учета очередности выбытия: оценка математических ожиданий и дисперсий, настоящую стоимость страхового обеспечения для нескольких лиц с учетом очередности выбытия и аннуитеты на пережитие. В четвёртой главе рассматривается понятие резерва, зависимости вероятности от резерва, резерв объединенных портфелей и резерв и перестрахование. Кроме того, в данной работе представлена программа поиска оптимальной стратегии резерва, исходя из имеющихся процентной ставки, ОРН перестраховщика и вероятности того, что страховой компании может не хватить собственных средств для страховых выплат на языке С++.

Особую актуальность эта тема приобретает в связи с новыми формами работы страховой компании, когда предметом страхового договора становятся не только имущества фирм и предприятий и связанные с ними риски, но также и целые трудовые коллективы данных предприятий. Особенно актуальна эта тема в медицинском страховании.

1 Страхование группы взаимосвязанных лиц без учета очередности

Примерами страхования групп взаимосвязанных лиц без учета очередности выбытия могут служить страхование на случай первой или последней смерти в группе, которые могут рассматриваться как в модели с дискретным временем, так и в модели с непрерывным временем.

1.1 Оценка обязательств, связанных с первой смертью: модель с дискретным временем

Настоящая стоимость ежегодного бессрочного аннуитета пренумерандо, выплачиваемого до первой смерти в паре, состоящей из лица в возрасте x лет и лица в возрасте y лет, будет определяться по формуле

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\varphi(x,y)} v^k \cdot {}_k p_{xy}$$

1.2 Оценка обязательств, связанных с последней смертью: модель с дискретным временем

Аналогично могут быть построены оценки для страхования на случай последней смерти. Настоящая стоимость бессрочного ежегодного аннуитета пренумерандо, выплачиваемого до последней смерти в паре, определяется согласно формуле

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\psi(x,y)} v^k \cdot {}_k p_{\overline{xy}} \quad (3)$$

где $\psi(x,y)$= $max\{\omega_x - x, \omega_y - y\}$.

1.3 Коммутационные числа для группы взаимосвязанных лиц без учета очередности выбытия

Можно ввести числа для расчета настоящих стоимостей аннуитетов и страхового обеспечения по договорам страхования жизни нескольких взаимосвязанных лиц.

При этом могут иметь место различные подходы к определению фактора, отвечающего за дисконтирование. Это связано с тем, что необходимо учесть влияние двух (или более) значений возрастов. Однако, реально требование к такому фактору будет одно: чтобы при делении соответствующих коммутационных чисел друг на друга показатель степени при коэффициенте дисконтирования был правильным. Иными словами, коммутационные числа должны быть сконструированы так, чтобы выполнялись указанные требования к разности показателей степени при факторе, отвечающем за дисконтирование.

1.4 Общий подход к страхованию группы взаимосвязанных лиц без учета очередности выбытия

Обобщением страхования на случай первой или последней смерти в паре является страхование s-й смерти в группе из n лиц. Это связано как с рассмотрением группы произвольного числа лиц, так и увязки страхового случая не обязательно с первой или последней смертью. При определенных соотношениях параметров рассмотренные ранее оценки можно получить в качестве частных случаев.

1.5 Страхование группы взаимосвязанных лиц без учета очередности выбытия: модель с непрерывным временем

Формулы для оценки в модели с непрерывным временем будут такие же как и в случае страхования на случай смерти с единовременной выплатой страхового обеспечения модели с непрерывным временем.

2 Страхование группы взаимосвязанных лиц с учетом очередности выбытия

При таком страховании страховой случай возникает тогда, когда выбытие из группы взаимосвязанных лиц происходит в определенном порядке. Для простоты рассматриваем оценки аннуитетов и обязательств по страхованию жизни для пары лиц в возрасте x и y соответственно.

2.1 Оценка обязательств с учетом очередности вымирания на случай первой смерти

Оценка подобных обязательств может быть проведена по аналогии с предыдущими формулами, подстановкой соответствующих вероятностей. Так, настоящая стоимость страхового обеспечения, выплачиваемого в случае, если лицо в возрасте x умрет первым, будет оцениваться следующим образом:

$$A_{xy}^{1}=\sum_{k=0}^{\varphi(x,y)} v^{k+1} \cdot {}_{k}p_{xy} \cdot q_{\overset{1}{\overline{x+k:y+k}}}.$$

2.2 Оценка обязательств с учетом очередности вымирания на случай последней смерти

Если страховое обеспечение выплачивается в случае последней смерти в паре с учетом очередности, то следует рассматривать вероятности, обусловленные статусом ($\overset{2}{xy}$).

2.3 Аннуитеты на пережитие

Хотя ранее было указано на то, что оценивать настоящие стоимости аннуитетов для моделей, учитывающей очередность выбытия, может быть проблематично, существует случай, когда проблемы превращения аннуитета в вечную ренту не возникает. Это происходит, если выплаты аннуитета начинаются в случае смерти одного лица в паре и прекращаются со смертью второго лица. Такие договоры можно использовать при страховании потери кормильца.

Особенностью такого аннуитета является то, что не только момент окончания выплат, но и момент их начала связаны со случайными событиями, так что при определенных обстоятельствах(очередность смертей не соответствует тому, что определено в договоре) аннуитете может вообще не выплачиваться.

В модели с дискретным временем выплаты аннуитета, привязанные к календарному году, будут обусловлены событием, что лицо в возрасте x уже умерло, а лицо в возрасте y еще нет. Очевидно, вероятность этого события для фиксированного года k составляет ${}_kp_y \cdot {}_k q_x$. Тогда настоящую стоимость соответствующего аннуитета пронумерандо, обозначаемую $\ddot{a}_{x|y}$, можно оценить как

$$\ddot{a}_{x|y} = \sum_{k=0}^{\varphi(x,y)} v^k \cdot {}_kp_y \cdot {}_kq_x = \sum_{k=0}^{\varphi(x,y)} v^k \cdot {}_kp_y(1 - {}_kp_x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\varphi(x,y)} v^k \cdot {}_kp_y - \sum_{k=0}^{\varphi(x,y)} v^k \cdot {}_kp_{xy}$$

3 Вероятностная интерпретация актуарных оценок для страхования нескольких лиц

3.1 Особенности распределения случайных величин

В целом принципы оценки распределений случайных величин настоящих стоимостей обязательств в модели нескольких взаимосвязанных лиц те же, что и в модели с одним лицом. Это, в частности, означает, что строятся случайные величины v^Y или $\ddot{a}_{\overline{Y+1|}}$, где Y - подходящая случайная величина продолжительности сохранения анализируемого статуса. Если известно распределение Y, то определить распределение соответствующей случайной величины настоящей стоимости обязательств не сложно.

Поскольку соответствующие функции распределения выражаются через функции распределения случайных величин T(x) и T(y) не линейно, на практике проще использовать численные оценки или формулы в терминах функции распределений случайной величины Y, а не общие формулы в терминах функции распределения $F_{T(x)}(s)$ и $F_{T(y)}(s)$. Поэтому далее сосредоточимся на оценках математического ожидания и дисперсии случайных величин настоящих стоимостей обязательство, а не на их функциях распределения.

3.2 Страхование нескольких лиц без учета очередности выбытия: оценка математических ожиданий и дисперсий

Рассмотрим соответствующие оценки для пары лиц в возрасте x и возрасте y. Тогда страховыми случаями может быть первая или последняя смерть в этой паре.

В случае страхования нескольких взаимосвязанных лиц без учета очередности их выбытия могут быть рассмотрены случайные величины сохранения соответствующего статуса(в данном случае статуса, связанного с первой или последней смертью в паре лиц). Поэтому принципиальных отличий от того подхода, который был продемонстрирован для страхований одного лица, здесь также не будет: следует всего лишь заменить случайную величину продолжительности предстоящей жизни случайной величиной сохранения соответствующего статуса. Проиллюстрируем это на примере бессрочного аннуитета и договора бессрочного страхования на случай смерти в модели с непрерывным временем.

3.3 Настоящая стоимость страхового обеспечения для нескольких лиц с учетом очередности выбытия

Рассмотрим в качестве примера договор бессрочного страхования, по которому единичное страховое обеспечение выплачивается только в том случае, если из пары лиц лицо в возрасте x умрет первым. Очевидно, в основе определения актуарных оценок лежит исследование статуса ($\overset{1}{xy}$).

Тогда случайная величина настоящей стоимости страховых выплат по такому договору будет аналогом случайной величины, введенной для срочного страхования на случай смерти, но со случайным ограничением на срок выплат:

$$\mathrm{S} = \begin{cases} v^{\mathrm{T(x)}}, & T(x) < T(y), \\ 0, & T(x) \le T(y). \end{cases}$$

3.4 Аннуитет на пережитие

Соответствующую случайную величину будущих выплат аннуитета можно представить как

$$S = \begin{cases} {}_{T(X)|}\overline{a}_{\overline{T(y)-T(x)}}, & T(x) < T(y), \\ 0, & T(x) \geq T(y). \end{cases}$$

4 Нахождение оптимальной стратегии резерва

4.1 Вводные замечания

Первая задача актуария – расчет правильной, вероятностно обоснованной величины страхового взноса подробно обсуждалась выше. ,

Взнос состоит из рисковой премии, рисковой надбавки и нагрузки. Рисковая премия – основная составляющая страхового взноса, обеспечивающая принцип эквивалентности ответственности сторон страхового договора. Ни одна страховая компания не назначит взноса ниже рисковой премии, так как это означает разорение с вероятностью 100%. Нагрузка – экономическая составляющая, которая складывается из затрат на ведение дела, и компания так же не может ее существенно изменить. Рисковая надбавка обеспечивает оплату взносов, число которых превышает среднее, и, собственно, она и характеризует надежность компании.

4.2 Резерв страховой компании

4.2.1 Понятие резерва

Пусть с вероятностью, соответствующей требуемому уровню надежности, число возможных исков находится в доверительном интервале $[n_1;n_2]$. Компания собрала взносов, которых хватает на оплату m исков и $m<n_2$. Значит, для обеспечения оплаты m+1-го, m +2-го, …, n_2-го исков, компания должна иметь дополнительные средства, которые создаются или из собственных средств учредителей компании или берутся в кредит. Это и есть резерв страховой компании.

4.2.2 Зависимость вероятности разорения от резерва

Зависимость вероятности разорения от резерва на примере двух договоров

Рассматриваем страхование от ущерба двух объектов. Для первого объекта максимально возможный ущерб a, для второго b (для определенности $a < b$) и в обоих случаях ущерб распределен равномерно.

Пусть U имеющийся резерв. Тогда вероятность разорения $\varepsilon = P(z > U) = \int\limits_U^{a+b} h(z)\,dz$.

Если $0 \le U \le a$, то $\varepsilon = \int\limits_U^a \frac{z}{ab}\,dz + \int\limits_a^b \frac{1}{b}\,dz + \int\limits_b^{a+b}\left(\frac{a+b}{ab} - \frac{z}{ab}\right)dz \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(U) = 1 - \frac{U^2}{2ab}$. Это уравнение параболы, ветви которой направлены вниз, а так как $\varepsilon'(U) < 0$, то это часть параболы правее вершины.

Если $a \le U \le b$, то $\varepsilon = \int\limits_U^b \frac{1}{b}\,dz + \int\limits_b^{a+b}\left(\frac{a+b}{ab} - \frac{z}{ab}\right)dz \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(U) = 1 + \frac{a}{2b} - \frac{U}{b}$. Это линейная убывающая функция.

Если $U > b$, то $\varepsilon = \int\limits_U^{a+b}\left(\frac{a+b}{ab} - \frac{z}{ab}\right)dz \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(U) = \frac{(a+b)^2}{2ab} - \frac{(a+b)U}{ab} + \frac{U^2}{2ab}$. Это уравнение параболы, ветви которой направлены вверх, а так как $\varepsilon'(U) = \frac{U-(a+b)}{ab} < 0$, то это часть параболы левее вершины.

Зависимость вероятности разорения от резерва для крупного пакета договоров

Обозначим суммарную величину всех предъявленных исков Y, величину резерва, как и выше, U. Для обеспечения вероятности разорения не выше ε должно быть выполнено условие $P(Y \le U) = 1 - \varepsilon$, которое может быть заменено равносильным условием $P\left(\frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \le \frac{U - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right) = 1 - \varepsilon$.

По предельной теореме Лапласа $P\left(\frac{Y-M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \le a\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{a} e^{-t^2/2} dt$.

Пусть пакет достаточно крупный, чтобы «→» можно было заменить на «≈». Так как $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{a} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{a} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} + \Phi(a)$, где $\Phi(a)$ – функция Лапласа, получаем уравнение $\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{U-M(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right) = 1 - \varepsilon \Rightarrow$ $\varepsilon(U) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{U-M(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right)$.

4.2.3 Резерв объединения портфелей

Рассмотрим два субпортфеля с резервами

$U_1 = a\sqrt{D(Y_1)} + M(Y_1)$ и $U_2 = a\sqrt{D(Y_2)} + M(Y_2)$.

Тогда для их объединения

$$U_{1+2} = a\sqrt{D(Y_1+Y_2)} + M(Y_1+Y_2) = a\sqrt{D(Y_1)+D(Y_2)} + M(Y_1) + M(Y_2).$$

4.3 Резерв и перестрахование

Рассмотрим ситуацию, когда компания вынуждена назначить рисковую надбавку ниже, чем того требует заданная надежность, а резерва для обеспечения требуемого уровня неразорения недостаточно. То есть, у компании есть риск, что объем предъявленных ей исков превысит сумму собранных взносов и имеющегося резерва. Как и любой риск, этот риск может быть застрахован в другой страховой компании. Эта процедура и называется перестрахованием: страховая компания-перестрахователь (цедент) выступает в роли клиента у другой страховой компании-перестраховщика.

По виду передаваемой ответственности выделим два типа перестраховочных договоров:

- квотные договора, в которых на перестрахование передается определенный процент с каждого риска;
- эксцедентные договора, в которых на перестрахование передаются риски из определенного интервала от G_1 (приоритет или первый риск) до G_2 (второй риск).

Естественно, возможны комбинированные договора, в которых часть риска передается на эксцедентной основе, а следующая часть на квотной, как и более сложные варианты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основное содержание страхования заключается в том, что страховая компания предлагает клиентам заплатить ей сравнительно небольшой взнос, и тогда при несчастном случае, оговоренном в договоре, компания выплатит клиенту сумму, существенно больше взноса. Теоретически возможны обе крайние ситуации. С одной стороны может не произойти ни одного несчастного случая, и компания получить большую прибыль. С другой стороны могут случиться несчастные случаи со всеми клиентами, и тогда компания окажется с огромным долгом. То есть большое значение приобретают вероятность страхового случая и вероятность разорения компании. Вероятность страхового случая определяется специалистами-статистиками. Вероятность разорения, или риск компании исследуется специалистами в одной из областей математики – актуарной математике.

Актуарная математика охватывает очень много аспектов деятельности компаний, связанных с риском. Методы актуарной математики, основанные в значительной мере на методах теории вероятности, позволяют производить расчеты при определении взноса, вносимого клиентом при заключении страхового договора. Актуарий должен на основе реальных данных об исследуемом процессе определить основные закономерности и тенденции развития этого процесса и по результатам прогноза спланировать финансовую деятельность компании, которая обеспечит оптимальные результаты.

При коллективном страховании у фирмы или предприятии, или любой другой организации появляется возможность контролировать свои убытки с помощью стратегического планирования. Такая возможность предоставляется именно договорам коллективного страхования, параметры которого могут быть выбраны, исходя из конкретных целей и задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Кудрявцев, А.А. Актуарная математика. Оценка обязательств компании страхования.

2 Большев, Л.Н. Таблицы математической статистики. - М.: Наука, 1983.

3 Корнилов, И.А. Основы страховой математики. - М.:ЮНИТИ, 2004.

4 Кутуков, В.Б. Основы финансовой и страховой математики. Методы расчета кредитных, инвестиционных, пенсионных, страховых схем. – М.: Дело, 1998.

5 Севастьянов, Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1982.

6 Штрауб, Э. актуарная математика имущественного страхования. – М.: КРОКУС-Т, 1993.

7 Кагаловская, Э.Т. Страховая математика //Финансовая газета. 1997

8 Страхование. Ч. 1-8. - М.: Финансы, 1994-1996.

9 Основы страховой (актуарной) математики, Кошкин Г.М., 2002.

10 Бауэрс, Н. Актуарная математика. 2001 год.

11 Денисов, Д.В. Актуарная математика. Уч. пособие. 2002 год.

12 Гербер, Х. Математика страхования жизни. М.: Мир, 1995. – 154 с.

13 Фалин, Г.И. Введение в актуарную математику. М.: МГУ, 1994. – 110 с.

14 Мак, Томас, Математика рискового страхования./ Пер. с нем. – М.: ЗАО “Олимп-Бизнес”, 2005.-432 с.: ил.

15 Кудрявцев, А.А. Актуарные модели финансовой устойчивости страховых компаний. СПб.: Институт страхования, 1997. – 62 с.