Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ОЦЕНИВАНИЕ ОПЦИОНОВ В ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЯХ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Федосеевой Валентины Александровны

Научный руководитель
д. ф.-м. н. ______________ А. Л. Лукашов

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н. ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью выпускной квалификационной работы является изучение биномиальной модели B-S рынка, а также разбор основных понятий верхних и нижних цен в более общих моделях с дискретным временем.

Биномиальный B-S рынок является наиболее простой моделью рынка с дискретным временем, который широко используется в стохастической финансовой математике для исследования различных финансовых инструментов.

Были поставлены следующие задачи:

- изучение теории B-S рынка;
- разбор основных понятий верхних и нижних цен в более общих моделях с дискретным временем;
- расчёт величин для конкретных опционов;
- написание программного кода для расчёта вспомогательной величины нахождения цены опциона.

В разделе 1 выпускной квалификационной работы приводятся основные понятия и факты теории (B, S)–рынка, а также теория верхних и нижних цен в одношаговой модели. Рассуждения данного раздела основываются на книге [2], где подробно и понятно рассматривается теория B-S рынка и теория верхних и нижних цен опционов, в частности.

В разделе 2 рассматривается случай более общей N-периодической модели. В качестве основого источника используется статья [1], в которой автор рассматривает случай N-периодической модели и её сопоставление с моделью Кокса-Росса-Рубенштейна. В данной работе исправлены существенные неточности в формулировке одного из утверждений, имеющего важную роль в расчёте цен опционов.

В разделе 3 приводятся примеры конкретных опционов, а также результаты програмного кода на языке java, рассчитывающего вспомогательную величину нахождения цены опциона по формуле, рассмотренной во втором разделе работы. Данный програмный код также будет включен в выпускную квалификационную работу.

1 Модель биномиального B-S рынка. Верхние и нижние цены.

Рассмотрим модель рискового актива, определённого на вероятностном пространстве (Ω, A, P), для дискретного времени,

$$X_n = X_0 \prod_{k=1}^{n} Y_k, 1 \leq n \leq N, \tag{1.1}$$

где (Y_k, A_k) стохастическая последовательность и Y_k ограничено $0 \leq a_k \leq Y_k \leq b_k$.

Пусть B_n – облигации (безрисковый актив) с постоянной процентной ставкой $r_i \geq 0$, $a_i \geq 1 + r_i \geq b_i$

$$B_n = B_0 \prod_{k=1}^{n} 1 + r_k \tag{1.2}$$

Определение 1 Стохастическая (предсказуемая) последовательность $\pi = (\beta, \gamma)$ с $\beta = (\beta_n)$ и $\gamma = (\gamma_n)$; где β_n и γ_n являются F_{n-1} - измеримыми при всех $n \geq 0$, называется портфелем ценных бумаг инвестора на биномиальном рынке.

Определение 2 Капиталом портфеля ценных бумаг π называется стохастическая последовательность $X^{\pi} = (X_n^{\pi})_{n \geq 0}$ с $X_n^{\pi} = \beta_n B_n + \gamma_n X_n$

Рассмотрим европейский опцион покупки $f_N = f(X_1, \ldots, X_N) \geq 0$, где f – выпуклая функция переменных $X_1, \ldots, X_N$. Таким образом, f_N - некоторая (“целевая”) неотрицательная F_N-измеримая функция, имеющая смысл “платежного обязательства” [3].

Верхняя цена платёжного обязательства f_N даётся формулой [2]

$$C^*(f_N, P) = \inf\{x : \exists \pi, \text{ для которого } X_0^{\pi} = x \text{ и } X_N^{\pi} \geq f_N\}, \tag{1.3}$$

а нижняя цена формулой [2]

$$C_*(f_N, P) = \sup\{x : \exists \pi, \text{ для которого } X_0^{\pi} = x \text{ и } X_N^{\pi} \leq f_N\} \tag{1.4}$$

На безарбитражном рынке цены имеют следующее представление [1]

$$C^*(f_N, P) = \sup_{\hat{P} \in \mathcal{P}(P)} B_0 E_{\hat{P}} \frac{f_N}{B_N}, \tag{1.5}$$

$$C_*(f_N, P) = \inf_{\hat{P} \in \mathcal{P}(P)} B_0 E_{\hat{P}} \frac{f_N}{B_N}, \tag{1.6}$$

где $\mathcal{P}(P)$ – это множество всех мартингальных мер $\hat{P}$ для дисконтированного процесса (S_N/B_N) эквивалентных P, которое не пусто.

В одношаговой модели $N = 1, B_1 = B_0(1+r), X_1 = X_0(1+\rho)$, где процентная ставка r есть константа $(r \geq 0)$, а процентная ставка ρ является случайной величиной $(\rho \geq 0)$, верхняя цена даётся с помощью модели Кокса-Росса-Рубенштейна, в то время как нижняя цена достигается на мере P_*, где $Y_1 = 1 + r (= 1 + r_1)$ [2].

2 N-периодическая модель B-S рынка. Сопоставление с CRR-моделью.

Рассуждение, использованное в однопериодической модели, может быть расширено для N-периодической модели. Аналогично, верхняя граница возникает из CRR-модели, а нижняя соответствует константе $Y_i = 1 + r_i$. Это утверждение базируется на сверх-хеджированнии портфелей в случае, когда $Y_1, \ldots, Y_N$- независимы, $f_N = f(X_N)$, f – выпуклая, $a_k = 1 + u, r_k = r$, а $d < r < u$. В этом случае, при соответственном аппроксимирующем предположении верхняя цена определяется следующим образом [1]

$$C^*(f_N, P) = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} (\frac{r-d}{u-d})^{N-k} (\frac{u-r}{u-d})^k f(X_0(1+u)^{N-k}(1+d)^k) \tag{2.1}$$

Нижняя цена определяется так

$$C_*(f_N, P) = \frac{(f(X_0(1+r)^N))}{(1+r)^N} \tag{2.2}$$

Рассмотрим технику увеличения риска распределения, основанную на идее сохранения среднего и выметания. Вероятностная мера Q_2 сохраняет среднее Q_1 на заданном интервале [a, b], если на этом интервале масса смещена к границам, в то время как среднее сохраняется. В терминах случайных переменных Z сохраняет среднее Y на интервале [a, b], если

1. $P^Z(B) = P^Y(B)$ при $B \cap [a, b] = \oslash$;
2. $P^{Y1_{[a,b]}(Y)} \preceq_{cx} P^{Z1_{[a,b]}(Z)}$;

где $\preceq_c x$ – это выпуклое распределение. Отношения 1 и 2 подразумевают, что

$$EZ1_{[a,b]}(Z) = EY1_{[a,b]}(Y).$$

Далее, для некоторой выпуклой функции f, такой что Е $f(Z)$ существует, утверждается следующее неравенство:

$$Ef(Y) \leq Ef(Z) \tag{2.3}$$

отсюда, Y меньше чем Z в выпуклом распределении, $Y \preceq_{cx} Z$. Часть построения такого сохраняющего среднее – это выметание $Z = Y_a^b$ для Y с распределением, определяемым как

$$P(Y_a^b = a) = \frac{1}{b-a} E1_{[a,b]}(Y)(b-Y) \tag{2.4}$$

и

$$P(Y_a^b = b) = \frac{1}{b-a} E1_{[a,b]}(Y)(Y-a). \tag{2.5}$$

Вся масса Y на [a,b] выметается к границам интервала a и b, в то время как среднее сохраняется. Далее, расширим это рассуждение для сравнения выпуклых функций облигации покупки в модели с дискретным временем.

Пусть (X_n, A_n) неотрицательная стохастическая последовательность, $X_n = \prod_{i=1}^n Y_i$, где $a_i \le Y_i \le b_i, a_i \le 1 \le b_i$, и $f(x_1, \ldots, x_N)$ - выпуклая функция. Значение выпуклой функции платёжного обязательства $f_N = f(X_1, \ldots, X_N)$ можно соотносить со значением из CRR-модели [2].

Утверждение 2.1(сравнительная лемма)

Пусть $Q \in \mathcal{P}(P)$ – эквивалентная мартингальная мера для (X_N). Тогда

$$E_Q f(X_1, \ldots, X_N) \le E_Q f(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_N),$$

где $\tilde{X}_n = \prod_{i=1}^n \tilde{Y}_i, (\tilde{Y}_i)$ независимые элементы с распределением $Q^{\tilde{Y}_i} = Q^{(Y_i)\binom{a_i}{b_i}}$, $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_N$ –это CRR-модель и

$$E_Q f(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_N) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{T \subset \{1,\ldots,N\}} \prod_{l \in T} q_l^* \prod_{l \notin T} p_l^* f(X_*^{k,T}) \tag{2.6}$$

где $X_*^{k,T} = (c_1, \ldots, c_N), c_j = \prod_{i=1}^j d_i$ и $d_i = \begin{cases} a_i, i \in T \\ b_i, i \notin T \end{cases}$, $p_k^* = \frac{1-a_k}{b_k-a_k} q_k^* = \frac{b_k-1}{b_k-a_k}$.

Доказательство.

Рассмотрим условное математическое ожидание

$$E_Q(f(X_1, \ldots, X_N)|X_{(N-1)}) = E_Q(f(X_1, \ldots, X_N, X_{N-1}Y_N)|Y_1, \ldots, Y_{N-1}),$$

где $X_{(N-1)} = (X_1, \ldots, X_{N-1})$. Далее, для мартингального предположения получаем

$$E_Q(Y_N|Y_1, \ldots, Y_{N-1}) = 1.$$

В связи с этим, из (2.3) имеет место выметание с учётом условного распределения и из выпуклости f в последней переменной получаем

$$E_Q(f(X_1,\dots,X_N)|X_{(N-1)}) \le E_Q(f(X_1,\dots,X_{N-1},X_{N-1}(Y_N)_{a_n}^{b_n})|X_{(N-1)})$$

$$= E_Q(f(X_1,\dots,X_{N-1},X_{N-1}\tilde{Y}_N)|X_{(N-1)}) =: H_N \qquad (2.7)$$

При этом, используя технику выметания, получаем

$$Q((Y_N)_{a_n}^{b_n} = b_N|X_{(N-1)}) = \frac{1-a_N}{b_N-a_N} =: p_N^*$$

и

$$Q((Y_N)_{a_n}^{b_n} = a_N|X_{(N-1)}) = \frac{b_N-1}{b_N-a_N} =: q_N^*$$

независимые условия. Следовательно, $Q^{(Y_N)_{a_n}^{b_n}|X_{(N-1)}} = Q^{\tilde{Y}_N}$ и $(Y_N)_{a_n}^{b_n}$ независимы от $X_{(N-1)} = (X_1,\dots,X_{N-1})$. Из (2.7) получаем

$$E_Q(f(X_1,\dots,X_N)) \le H_N$$

$$= p_N^* E_Q f(X_1,\dots,X_{N-1},X_{N-1}b_N) + q_N^* E_Q f(X_1,\dots,X_{N-1},X_{N-1}a_N)$$

Утверждение 2.1 позволяет сравнивать мартингал $X_1,\dots,X_N$ с мартингалом CRR-модели $\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_N$, который порождает верхнюю цену функции платёжного обязательства $f_N = f(X_1,\dots,X_N)$, повышая риск.

Рассмотрим модель с дискретным временем (1.1), (1.2) с $0 \le a_k \le 1 + r_k \le b_k$. Допустим следующие аппроксимирующие условия, аналогичные условиям из одношаговой модели:

(A^*) Пусть существует последовательность $(Q_n) \subset \mathcal{P}(P)$, такая что $Q_n^{(X_1,\dots,X_n)}$ слабо сходится к мере CRR-модели $Q^* = \otimes_{i=1}^N Q_i^*$, причём

$$Q_k^*(\{b_k\}) = p_k^* = \frac{1+r_k-a_k}{b_k-a_k}, Q_k^*(\{a_k\}) = q_k^* = \frac{b_k-1-r_k}{b_k-a_k}.$$

Условие (A^*) выполняется, если для $\forall \epsilon > 0$ и $T \subset \{1,\dots,N\}$,

$$P(\prod_{k\in T}[a_k, a_k+\epsilon] \times \prod_{k\notin T}[b_k-\epsilon, b_k]) > 0.$$

(A_*) Пусть существует последовательность $(\bar{Q}_n) \subset \mathcal{P}(P)$, такая что $\bar{Q}_n^{(X_1,\ldots,X_N)}$ слабо сходится к мере $Q_* = \otimes_{i=1}^N (Q_i)_*$, где

$$(Q_i)_*(\{1 + r_i\}) = 1,$$

это одноточечная мартингальная мера для $(\frac{X_N}{B_N})$.

Теорема 2.1 (формула верхней и нижней цены) При условии (A^*) и (A_*), верхняя и нижняя цены для N-мерной модели с дискретным временем определяются по формулам

$$C^*(f_N, P) = B_0 E_{Q^*} \frac{f_N}{B_N},$$

и

$$C_*(f_N, P) = B_0 E_{Q_*} \frac{f_N}{B_N}.$$

Здесь Q^* - CRR-мартингальная мера, в то время как Q_* - мера, определённая в (A_*).

3 Примеры конкретных опционов.

В выпускной квалификационной работе рассмотрены примеры конкретных опционов. Приведём один из них.

Пример азиатского опциона

Азиатский опцион — разновидность опциона, при которой цена исполнения определяется на основе средней стоимости базового актива за определенный период времени. Азиатский опцион еще называют опционом средней цены или среднекурсовым опционом. Как правило, такие опционы заключаются на товары, биржевые индексы, курсы валют и процентые ставки.

Платёжное обязательство для азиатского опциона определяется функцией $f_N = \frac{X_1+...+X_N}{N}$.

Программа, приведённая в выпускной квалификационной работе, рассчитывает $E_Q f(X_1, \ldots, X_N)$ по формуле (2.6) для входных данных N, a_i, b_i и функции платёжного обязательства. Эта формула служит для определения цены опциона.

Итак, для азиатского опциона

$$E_Q f(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_N) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{T \subset \{1,...,N\}} \prod_{l \in T} q_l^* \prod_{l \notin T} p_l^* f(c_1, ..., c_N) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \sum_{T \subset \{1,...,N\}} \prod_{l \in T} q_l^* \prod_{l \notin T} p_l^* (\frac{c_1 + ... + c_N}{N}),$$

где $c_j = \prod_{i=1}^{j} d_i$ и $d_i = \begin{cases} a_i, i \in T \\ b_i, i \notin T \end{cases}$, $p_k^* = \frac{1-a_k}{b_k-a_k} q_k^* = \frac{b_k-1}{b_k-a_k}$.

Например, для N = 3, $a_1 = 0.2, a_2 = 0.3, a_3 = 0.4, b_1 = 1.2, b_2 = 1.3, b_3 = 1.4$ програмный код выводит решение $E_Q f(X_1, \ldots, X_N) = 0.5568$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Биномиальная модель оценивания опционов является широко распространенным и с точки зрения прикладной математики достаточно простым и очевидным численным методом расчета цен опционов.

В выпускной квалификационной работе были рассмотрены основные понятия теории верхних и нижних цен в общих моделях с дискретным временем. А именно, были приведены основные понятия теории биномиального рынка, понятие верхних и нижних цен в одношаговой модели B-S рынка.

Также на основе одношаговой модели был рассмотрен случай более общей N-периодической модели. Данная теория основывается на статье [1], в которой были обнаружены существенные неточности в формулировке одного из утверждений.

В последней части работы приводятся примеры конкретных опционов, а также предложено программное обеспечение на языке java для расчёта вспомогательной величины нахождения цены опциона по формуле, рассмотренной во втором разделе работы, и его результаты для конкретных примеров.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Ruschendorf, L., On Upper and Lower Prices in Discrete-Time Models / Ruschendorf L., Стохастическая финансовая математика, Сборник статей, Тр. МИАН, 237, Наука, М., 2002, 143–148.

2 Ширяев, А. Н., Основы стохастической финансовой математики / Ширяев А. Н., Том 2. Теория. Москва: ФАЗИС, 1998. 544с..

3 Каштанов, Ю. Н., Модели финансовой математики и статистическое моделирование / Каштанов Ю. Н., Санкт- Петербург, 2011.