

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и приближений

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ
АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Давыдовой Ирины Сергеевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н.

А.В.Шаталина

Зав. кафедрой
д. ф.-м. н.

С.П.Сидоров

Саратов 2017

Введение. Рынок ценных бумаг - неотъемлемая часть рыночной экономики, в условиях которой Россия функционирует сравнительно недавно. В современном мире выпуск и обращение ценных бумаг увеличиваются и приобретают большую значимость для предпринимательства, бизнеса и экономики в целом. Чтобы эффективно использовать рынок ценных бумаг, необходимо знать сущность рынка и самих ценных бумаг, основные принципы и законы рынка ценных бумаг.

Нынешнее состояние финансового рынка заставляет быстро и адекватно реагировать на его изменения, поэтому инвесторы не стремятся создавать однородные активы, а составляют диверсифицированный портфель с самыми разнообразными ценными бумагами, который обеспечивает более стабильный доход держателю портфеля. Таким образом, тенденции рынка и недостаточная реализация теоретических знаний обосновывают актуальность рассматриваемой темы.

Предметом исследования выступает рынок ценных бумаг. Объектом исследования является оптимизация и моделирование составления портфелей ценных бумаг на основе показателей эффективности.

Цель данной работы заключается в рассмотрении основных моделей формирования оптимального портфеля ценных бумаг, которые пользуются популярностью у инвесторов и аналитиков финансового рынка.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

- рассмотреть основы портфельного инвестирования;
- определить критерии оптимальности портфеля, описать модели его формирования;
- построить портфели с использованием метода машинного обучения;
- сравнить характеристики портфелей, построенных по разным моделям, но состоящих из одинаковых видов ценных бумаг.

В написании работы использовались как классические математические источники (Г. Марковиц, У. Шарп, У. Маккалок, У. Питтс), так и современные материалы (Буренин А. Н., Галушкин А. И., Хайкин С.), доклады научных конференций, статьи математических журналов.

Выпускная работа состоит из теоретической и практической части. В теоретической части рассматриваются основы портфельного инвестирования, диверсифицированный портфель, модель оптимального портфеля Г. Марковица и ее модификация с помощью нейронной сети Хопфилда, модель оптимального портфеля У. Шарпа. Практическая часть представляет собой реализацию построения оптимального портфеля по изученным моделям на языке C#, их сравнение и оценку результатов.

Научная новизна состоит в применении методов машинного обучения к оптимизационным задачам в области компьютерного обеспечения экономической деятельности.

Научная значимость демонстрируется практическим применением теоретически обоснованных методов к решению прикладных задач математики.

Основное содержание работы. В сложившейся мировой практике фондового рынка под инвестиционным портфелем понимается некая совокупность ценных бумаг, принадлежащих физическому или юридическому лицу, выступающая как целостный объект управления [8]. Это означает, что при формировании портфеля и дальнейшем изменении его состава, структуры менеджер-управляющий формирует новое инвестиционное качество с заданным соотношением риск/доход [3]. Однако созданный портфель представляет собой определенный набор из корпоративных акций, облигаций с различной степенью обеспечения и риска и бумаг с фиксированным гарантированным государством доходом, т.е. с минимальным риском потерь по основной сумме и текущих поступлений —

дивидендов, процентов. Теоретически портфель может состоять из бумаг одного вида. Его структуру можно изменить путем замещения одних бумаг другими. Вместе с тем каждая ценная бумага в отдельности не может достичь подобного результата.

Смысл портфеля — улучшить условия инвестирования, придав совокупности ценных бумаг такие инвестиционные характеристики, которые недостижимы с позиции отдельно взятой ценной бумаги и возможны только при их комбинации.

В процессе формирования портфеля достигается новое инвестиционное качество с заданными характеристиками. Портфель ценных бумаг является тем инструментом, с помощью которого инвестору обеспечивается требуемая устойчивость дохода при минимальном риске [5].

Процесс управления инвестициями помогает облегчить портфельная теория Гарри Марковица.

Портфельная теория – это набор методов сбалансирования рисков и экономической выгоды при выборе направлений рискованных инвестиций.

Марковиц отмечал, что типичный инвестор желает, чтобы «доходность была высокой» и одновременно хочет, чтобы «доходность была бы настолько определенной, насколько это возможно» [1]. То есть, инвестор, стремясь одновременно максимизировать ожидаемую доходность и минимизировать неопределенность (риск), имеет две противоречащие друг другу цели, которые должны быть сбалансированы при принятии решения о покупке в момент $t = 0$.

Следствием наличия двух противоречивых целей является необходимость проведения диверсификации с помощью покупки не одной, а нескольких ценных бумаг.

Модель оптимального портфеля Г. Марковица (1952 г.)

Г. Марковиц предположил, что распределение вероятностей значения доходности портфеля вокруг ее математического ожидания описывается симметричной нормальной кривой Гаусса. Введя понятие дисперсии (изменчивости) как меры риска, или неопределенности дохода, Г. Марковиц имел в виду, что распределение этой кривой вокруг среднего значения отражает изменчивость доходности портфеля — область возможных результатов и вероятностей отклонений фактической доходности портфеля от ожидаемой доходности [1].

Г. Марковиц использует термин «эффективный» для характеристики портфеля, составленного из лучших по данной цене акций с минимальной изменчивостью доходности. Можно было бы говорить в данном случае об оптимизации.

Возможны два вида постановки задачи формирования оптимального портфеля. Первый тип задачи формирования оптимального портфеля Марковица можно определить как формирование портфеля минимального риска из всех портфелей, имеющих эффективность не менее заданной. Минимизация вариации эффективности портфеля равносильна минимизации риска портфеля, поэтому задача Марковица может быть сформулирована следующим образом: необходимо найти доли X_i , минимизирующие риск портфеля:

$$r_p = \sqrt{\sum_i^n \sum_j^n X_i X_j \sigma_{ij}} \rightarrow \min, \quad (6)$$

при условии, что обеспечивается заданное значение эффективности портфеля $E_p = \sum_i^n X_i E_i$ и поскольку X_i - доли, то в сумме они должны составлять единицу, то есть выполняется бюджетный баланс: $\sum_i^n X_i = 1$.

Второй тип задачи формирования оптимального портфеля – это формирование портфеля максимальной эффективности из всех портфелей,

имеющих риск не более заданного. В данном случае необходимо найти X_i , максимизирующие ожидаемую эффективность портфеля, то есть:

$$E_p = \sum_i^n X_i E_i \rightarrow \max, \quad (7)$$

при условии, что обеспечивается заданное значение риска портфеля, то

есть: $r_p = \sqrt{\sum_i^n \sum_j^n X_i X_j \sigma_{ij}}$ и они должны составлять единицу $\sum_i^n X_i = 1$.

Данную формализацию можно назвать портфелем Марковица максимальной эффективности.

Модифицированная модель оптимального портфеля Марковица с использованием сети Хопфилда (метод машинного обучения).

Для решения задачи нахождения оптимального портфеля при задании образцового хорошо подходит нейронная сеть Хопфилда. При построении такой сети определяется функционал энергии, и состояние сети путём расчёта минимума такого функционала. Сеть была предложена Джоном Хопфилдом в 1982 году [6].

Нейронная сеть Хопфилда состоит из N искусственных нейронов. Являясь нейронами с пороговой функцией активации, нейроны данной сети могут инициировать только два выходных значения: 1 или -1.

Нейрон подаёт на выход значение 1, если значение функции активации превышает некоторое пороговое значение и -1 в обратном случае.

Алгоритм обучения сети Хопфилда существенно отличается от таких классических алгоритмов обучения перцептронов, как метод коррекции ошибки или метод обратного распространения ошибки. Отличие заключается в том, что вместо последовательного приближения к нужному состоянию с вычислением ошибок, все коэффициенты матрицы рассчитываются за один цикл, после чего сеть сразу готова к работе [9]. Вычисление коэффициентов

основано на следующем правиле: для всех запомненных входных значений X_i матрица связи должна удовлетворять уравнению

$$X_i = wX_i \quad (8)$$

поскольку именно при этом условии состояния сети X_i будут устойчивы.

Это приводит нас к простому неитерационному методу расчёта параметров сети.

$$w_{ji} = \frac{1}{N} \sum_{k=1,2,\dots,m} X_{ik}X_{jk} \quad (9)$$

где w - матрица, составленная из весов нейронов, а m - количество запоминаемых образов.

Матрица взаимодействия w является симметричной (нейрон i действует на нейрон j так же, как нейрон j на нейрон i), при этом для исключения влияния нейронов на самих себя главная диагональ матрицы заполнена нулями.

Понятие энергии сети определяется как:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N w_{ij}X_iX_j, \quad (10)$$

Каждому запомненному образу в таком случае соответствует локальный энергетический минимум. Функция активации нейронов имеет вид:

$$F_j = \sum_j w_{ji} \text{sign}(F_i), \quad (11)$$

где $\text{sign}(F_i) = \{-1, F_i \geq 0; 1, F_i < 0\}$.

Входной образ присваивается сети, как начальное приближение. Затем начинается итерационная процедура.

Внесём изменения в модель Марковица, позволяющие нам лучше описать задачу формирования оптимального портфеля. Для снижения общего риска инвестиций в набор каких-либо активов долю каждого актива имеет смысл ограничить сверху и снизу (ни один из выбранных активов не должен занимать в портфеле слишком много или слишком мало места). Кроме того, мы можем установить прямое ограничение на количество активов в портфеле. Таким образом, получаем следующую модифицированную задачу оптимизации:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i (\lambda \sigma_{ij}) x_j - \sum_{i=1}^N (1 - \lambda) \mu_i x_i \rightarrow \min \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad (13)$$

$$\varepsilon < x_i < \delta, \quad (14)$$

где:

$f(x)$ – энергетическая функция сети Хопфилда;

x_i – доли активов, входящих в портфель;

μ_i – доходность актива i ;

σ_{ij} – коэффициент корреляции между активами i и j ;

λ – коэффициент неприятия риска, $\lambda \in [0,1]$;

ε – нижняя грань доли актива в портфеле;

δ – верхняя грань доли актива в портфеле.

Чтобы удовлетворить ограничению $\varepsilon < x_i < \delta$, в качестве функции активации используем функцию

$$G_i(y) = \varepsilon + \frac{\delta - \varepsilon}{1 + e^{-\beta y}}. \quad (15)$$

Модель оптимального портфеля У. Шарпа.

Уильям Шарп использовал результаты исследований Г. Марковица в качестве отправного пункта для дальнейших исследований, в ходе которых определил влияние модели Марковица на цены финансовых активов. Сделав допущение, что в любой момент времени цены на финансовые активы будут изменяться, чтобы обеспечить равновесие спроса и предложения каждого рискованного актива, он продемонстрировал, что ожидаемые показатели доходности рискованных активов должны иметь очень специфическую структуру [7].

Предпосылка модели оценки капитальных активов (capital asset pricing model, CAPM) состоит в том, что в состоянии равновесия доход от сделок на финансовом рынке вознаграждает людей за их рискованные инвестиции. Обычно люди не склонны к рискованным действиям, в связи с чем, премия за риск для всей совокупности рискованных активов должна быть реально ощутимой, чтобы у людей появилось желание владеть рискованными активами, существующими в экономике.

В основе модели Шарпа лежит метод линейного регрессионного анализа, позволяющий связать две случайные зависимые переменные величины X и Y линейным выражением типа

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon \quad (16)$$

В модели Шарпа в качестве зависимой переменной Y берется доходность $r_{i,t}$ какой-то i -й акции портфеля, измеренная за выбранные шаги расчета. Независимой переменной X считается величина какого-то рыночного показателя, воздействующего на доходности акций портфеля, ε – ошибка регрессии.

Таковым показателем может быть, например, темп роста валового внутреннего продукта, уровень инфляции, индекс цен потребительских товаров и т.п. Сам Шарп в качестве независимой переменной рассматривал доходность рыночного портфеля $r_{T,t}$ вычисленную за те же шаги расчета на основе индекса Standard and Poor's (S&P500). Выражение (16) называется уравнением линейной регрессии, а постоянные коэффициенты α и β считаются параметрами линейной регрессии [10].

В российских условиях доходность $r_{T,t}$ рыночного портфеля можно оценивать с использованием отечественных индексов РЦБ (например, индекса ММВБ или индекса РТС). Если задана длительность холдингового периода и известны значения индекса I в начале $I_{нач}$ и в конце $I_{кон}$ холдингового периода, то доходность рыночного портфеля за этот период находится по формуле

$$r_{T,t} = \frac{I_{кон} - I_{нач}}{I_{нач}}. \quad (17)$$

Особое значение необходимо уделить параметру β , поскольку он определяет чувствительность доходности i -й акции портфеля к изменениям рыночной доходности. В связи с этим коэффициент может служить мерой систематического риска.

В общем случае если $\beta > 1$, то доходность данной ценной бумаги более чувствительная, подвержена большим колебаниям, чем рыночная доходность. Соответственно при $\beta < 1$ ценная бумага имеет меньший размах отклонений доходностей от средней арифметической (ожидаемой) величины, чем рыночная доходность.

Расчет оптимального портфеля Шарпа выполняется по аналогии с рассмотренным портфелем Марковица.

Заключение. Отметим, что портфель в модифицированной модели Марковица имеет всегда более низкие значения дисперсии, чем портфель, созданный по модели Шарпа. Отличны также и доли вхождения акций в портфель. Тем не менее, эта разница не очень велика, поэтому можно считать, что модель Шарпа является удачным приближительным вариантом построения эффективных портфелей. В этой связи модель Шарпа находит широкое применение на практике и позволяет без значительных вычислений найти удачное приближение к оптимальному портфелю. Кроме того, необходимо учитывать, что для многих ценных бумаг специальные периодические издания публикуют параметры α и β для многих ценных бумаг, что еще более упрощает использование модели Шарпа.

В результате проделанной работы, было сформировано понятие о рынке ценных бумаг, выделены цели и задачи инвестирования, этапы построения портфельной теории и формирования диверсификационного портфеля, рассмотрено два фундаментальных подхода к созданию оптимального портфеля ценных бумаг, реализован процесс построения оптимального портфеля по изученным моделям на языке C#, проведено сравнение параметров моделей.

Полученные итоги оформлены в статью под названием «Оптимальный портфель» и будут опубликованы по результатам VI Международной молодёжной научно-практической конференции, которая пройдет в Саратове в период с 8 по 11 ноября 2017 года.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Markowitz, H. Portfolio Selection./ H. Markowitz.// The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91. March. 1952.
2. Бабешко, Л.О. Математическое моделирование финансовой деятельности./ Л.О. Бабешко. М.: Финакадемия, 2008. 192 с.
3. Белькова, Г. Д. Рынок ценных бумаг/ Г. Д. Белькова. Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 2007. 234 с.
4. Берзон, Н. И. Оценка финансовых активов по критерию «риск–доходность» с учетом длительности инвестирования / Н. И. Берзон, С. Н. Володин // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2010. Т. 14, № 3. С. 311-325.
5. Буренин, А. Н. Управление портфелем ценных бумаг. /А. Н. Буренин. М.:НТО имени академика С. И. Вавилова, 2008. 440 с.
6. Галушкин, А.И. Нейронные сети: основы теории /А.И.Галушкин. М.: Горячая линия-Телеком, 2010. 496 с.
7. Маккалох, Дж. Логические исчисления идей, относящихся к нервной деятельности./ Дж. Маккалох, У. Питтс. М.: Мир, 1971. 384 с.
8. Маренков, Н.Л. Ценные бумаги / Н.Л. Маренков. Ростов н/Д: Феникс, 2005. 602 с.
9. Хайкин, С. Нейронные сети. Полный курс / С. Хайкин. М.: Вильямс, 2006. 1104 с.
10. Шарп, У.Ф. Инвестиции./ У.Ф. Шарп, Г. Дж. Александер, Дж. В. Бейли. М.: ИНФРА-М, 2005.1028 с.