

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Кафедра Математического обеспечения  
вычислительных комплексов  
и информационных систем

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ  
АНАЛИЗА И СИНТЕЗА УПРАВЛЯЕМЫХ  
КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 273 группы  
направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика (ПМИ)  
факультет Компьютерных наук и информационных технологий (КНиИТ)  
Мельничук Дмитрия Вадимовича

Научный руководитель  
профессор, д. ф.-м. н. \_\_\_\_\_

Андрейченко Д.К.

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_

Андрейченко Д.К.

Саратов 2017

## ВВЕДЕНИЕ

В математическом моделировании при разработке параллельных алгоритмов и программ требуется применять адаптивные алгоритмы численного анализа с динамической балансировкой вычислительной нагрузки между процессорами. Примером могут служить задачи анализа и синтеза управляемых технических систем, содержащих взаимодействующие объекты с сосредоточенными по пространству параметрами и объекты с распределенными по пространству параметрами, на основе аппарата комбинированных динамических систем (КДС), т.е. математических моделей в форме обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и связанных с ними посредством граничных условий (ГУ) и условий связи (УС) уравнений в частных производных (УЧП) при соответствующих начальных условиях (НУ). Управляемые КДС зависят от набора вещественных параметров обратных связей. В общем случае вопрос остался открытым об условиях аналитичности характеристического и возмущающего квазимногочленов КДС в правой комплексной полуплоскости и вблизи мнимой оси. Положительное решение данного вопроса позволит обосновать применение «быстрого» алгоритма проверки устойчивости КДС, значительно сократить трудоемкость алгоритмов параметрического синтеза и распараллелить их. Далее, адаптивные варианты параметрического синтеза, связанные с внесением в пространство параметров оптимизации параметров «желаемой» частотной характеристики, могут оказаться более эффективными для случая малой протяженности областей устойчивости в пространстве параметров обратных связей. В свою очередь, требуется обосновать факт стабилизации нелинейной нестационарной управляемой КДС на основе параметрического синтеза по линеаризованной модели. При численном моделировании влияния типовых нелинейностей и нестационарности на выходные функции КДС применяется проекционный метод Галеркина и «жестко устойчивый» ФДН-метод, наибольшие затраты времени связаны с вычислением матрицы Якоби, и требуется «быстрый» алгоритм для ее вычисления. Параллельные алгоритмы параметрического синтеза, связанные с независимостью вычисления вкладов в среднеквадратичное отклонение вещественной частотной характеристики проектируемой системы от «желаемой» вещественной характеристики, могут быть адаптированы к технологии параллельного программирования MPI для кластерных систем. При моделировании влияния типовых нелинейностей и нестационарности на выходные функции КДС представляет интерес эволюция

во времени не всех координат фазового пространства КДС (теоретически – бесконечномерного), а лишь компонент выходной вектор-функции, и теоретически задачи данного класса допускают эффективную программную реализацию на большинстве современных параллельных высокопроизводительных вычислительных систем. В свою очередь, отсутствие в современном стандарте технологии MPI «штатных» средств для динамической балансировки вычислительной нагрузки может быть компенсировано разработкой паттерна распараллеливания (MPI-MAP) с динамической балансировкой вычислительной нагрузки по схеме «менеджер-исполнители», реализующего этап MAP паттерна параллельной обработки данных MAP-REDUCE. Далее, нет исчерпывающей информации об эффективности реализации параллельных алгоритмов анализа и синтеза управляемых КДС на различных архитектурах параллельных вычислительных систем.

Целью работы является: 1) обоснование применимости: а) «быстрого» алгоритма проверки устойчивости КДС; б) алгоритмов параметрического синтеза управляемых КДС, в том числе и их адаптивных вариантов; с) «быстрого» алгоритма вычисления матрицы Якоби; 2) создание паттерна распараллеливания MPI-MAP с динамической балансировкой вычислительной нагрузки по схеме «менеджер-исполнители» и тестирование его возможностей применительно к задачам: а) параметрического синтеза управляемых КДС; б) численного моделирования влияния типовых нелинейностей и нестационарности на выходные вектор-функции нелинейных КДС; 3) исследование эффективности параллельных алгоритмов компьютерного моделирования управляемых комбинированных динамических систем на а) симметричных мультипроцессорных системах с общей памятью; б) кластерных системах с распределенной памятью; с) вычислительных системах с сопроцессорами-ускорителями вычислений Intel Xeon Phi.

В качестве примера рассмотрена задача о стабилизации подвижного объекта управления (ракеты с учетом деформаций ее конструкции).

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

В **первой главе** рассмотрена структура математических моделей ряда современных технических систем, содержащих объекты управления с сосредоточенными по пространству параметрами и динамически связанные с ними через граничные поверхности объекты управления с распределенными по пространству параметрами, в форме КДС, т.е. в форме систем связанных посредством граничных условий и условий связи обыкновенных дифференциальных уравнений

и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях. Структурной схеме КДС на рис. 1 с кусочно-непрерывной входной вектор-функцией

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_{N_x}(t))^T$  и непрерывной выходной вектор-функцией  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_{N_y}(t))^T$  непрерывного времени  $t$  могут, например, соответствовать следующие модельные уравнения

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}) \quad (1.1)$$

$$\mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})|_S = 0 \quad (1.3)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \quad (1.5)$$

Здесь  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_{N_r})^T \in \mathbb{R}^{N_r}$  – набор независимых пространственных координат, позволяющих указать некоторую индивидуальную точку объекта с распределенными по пространству параметрами,  $\Omega \subset \mathbb{R}^{N_r}$  – область, занятая объектом с распределенными по пространству параметрами,  $S = \partial\Omega$  – граница области,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = (u_1(\mathbf{r}, t), u_2(\mathbf{r}, t), \dots, u_{N_u}(\mathbf{r}, t))^T \in \mathbb{R}^{N_u}$  – распределенная выходная вектор-функция, дифференциальные операторы  $\mathbb{F}$ , содержащие частные производные  $\partial / \partial \mathbf{r}$ ,  $\partial^2 / \partial \mathbf{r}^2$  (и, возможно, более высокого порядка) по независимым пространственным переменным, действуют на функции  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и соответствуют уравнениям в частных производных, описывающим движение объектов с распределенными по пространству параметрами; операторы  $\mathbb{G}$ , возможно, содержат частные производные  $\partial / \partial \mathbf{r}$  (и, возможно, более высокого порядка), действуют на функции  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и соответствуют граничным условиям, поставленным на границе объектов с распределенными по пространству параметрами, операторы  $\mathbb{H}$  содержат производные  $\partial / \partial \mathbf{r}$  и, возможно, более высокого порядка, действуют на поля перемещений и скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  континуальных элементов и соответствуют усло-

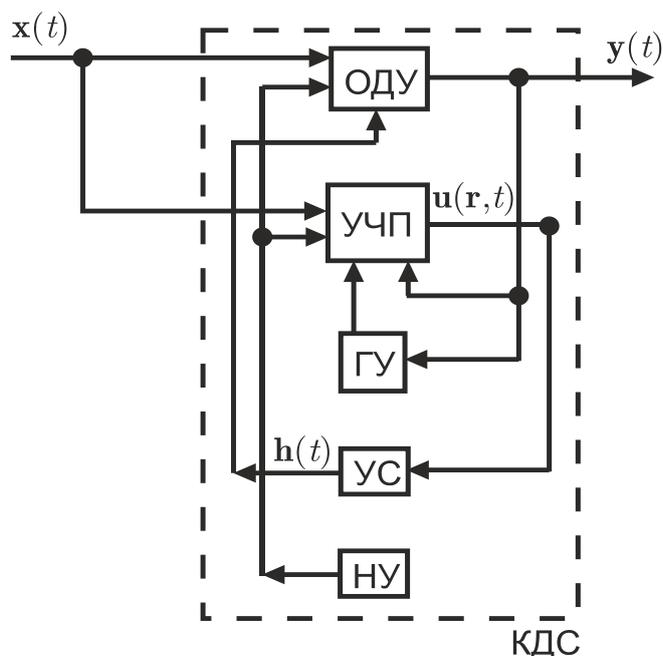


Рисунок 1 - Структурная схема управляемой КДС

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}), \quad \mathbf{r} \in \Omega \quad (1.2)$$

$$\mathbf{h} = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) dS \quad (1.4)$$

виям связей;  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{N_p}$  – параметры обратных связей;  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{N_\mu}$  – параметры, характеризующие влияние типовых нелинейностей и возможную нестационарность (явную зависимость модельных уравнений от некоторых компонент вектора  $\boldsymbol{\mu} t$ ); точкой сверху обозначено дифференцирование по времени  $t$ . Полагаем, что начальные значения  $\mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0(\mathbf{r})$  соответствуют равновесному состоянию КДС. В равновесном состоянии  $\dot{(\ )} = 0, \mathbf{x}_0 = Const$ ,

Далее приведены алгоритмы вычисления характеристического и возмущающих квазимногочленов КДС, «быстрый» алгоритм проверки устойчивости, аналог метода  $D$ -разбиений и методы параметрического синтеза управляемых КДС и параметрического синтеза семейства линеаризованных моделей КДС; при этом параметры «желаемой» частотной характеристики вносятся в пространство параметров оптимизации. Предложены адаптивные алгоритмы параметрического синтеза, более эффективные для случая малой протяженности областей устойчивости в пространстве параметров обратных связей. Сформулированы и доказаны теоремы об аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов КДС. В частности, для математических моделей объектов управления с распределенными по пространству параметрами, соответствующих процессам теплопроводности и диффузии, динамики поддерживающих слоев вязкой несжимаемой жидкости, а также динамике упругих сред с диссипацией энергии, характеристический и возмущающий квазимногочлены КДС будут аналитическими функциями комплексного параметра преобразования Лапласа в высокочастотной подобласти правой комплексной плоскости и вблизи мнимой оси. В низкочастотной области аналитичность проверяется численно на основе проекционного метода Галеркина и принципа аргумента. На основе асимптотического метода многих масштабов дано обоснование стабилизации нелинейной нестационарной КДС на основе параметрического синтеза по линеаризованной модели. Применительно к численному моделированию переходных процессов в нелинейных КДС и влиянию типовых нелинейностей на выходные вектор-функции КДС на основе проекционного метода Галеркина и «жестко устойчивого» ФДН метода сформулирована и доказана теорема о реализации «быстрого» алгоритма вычисления матрицы Якоби. В частности, матрица Якоби может быть найдена на основе проекционного метода Галеркина и принципа аргумента.

Во **второй главе** рассмотрены параллельные алгоритмы моделирования,

анализа и синтеза управляемых комбинированных динамических систем. Приведено описание разработанного на основе паттерна параллельной обработки данных MAP-REDUCE и стандартных операций парного обмена MPI паттерна распараллеливания MPI-MAP с динамической балансировкой вычислительной нагрузки на основе схемы «менеджер-исполнители». Приведены сведения о возможной оптимизации параллельных алгоритмов параметрического синтеза управляемых КДС и параметрического синтеза семейства линеаризованных моделей КДС, в том числе и предложенных в работе адаптивных вариантов. Предложен параллельный алгоритм моделирования влияния типовых нелинейностей и нестационарности на выходные вектор-функции КДС.

В третьей главе рассмотрена нелинейная нестационарная комбинированная динамическая модель системы стабилизации в направлении вертикали и относительно продольной оси подвижного объекта управления (ракеты с учетом упругих деформаций ее корпуса, рис. 2). Выполняется моделирование ошибки системы угловой стабилизации подвижного объекта (ракеты с учетом деформаций ее корпуса), т.е. углов отклонения  $\beta_1$  подвижного объекта от вертикали, обусловленных возмущающей поперечной силой

$$\mathbf{F}_e(t) = (0, F_{e_{y0}}(t), F_{e_{z0}}(t))^T.$$

Ошибка минимизируется за счет управления направлением силы тяги  $\mathbf{P}$  ракетного двигателя. В системе стабилизации углы отклонения от вертикали головной части ракеты измеряются пространственным гироскопическим стабилизатором. Результаты измерения подаются на вход ПИД-регуляторам, которые, с учетом нелинейности типа насыщения в системе управления, жесткости и демпфирования в подвесе

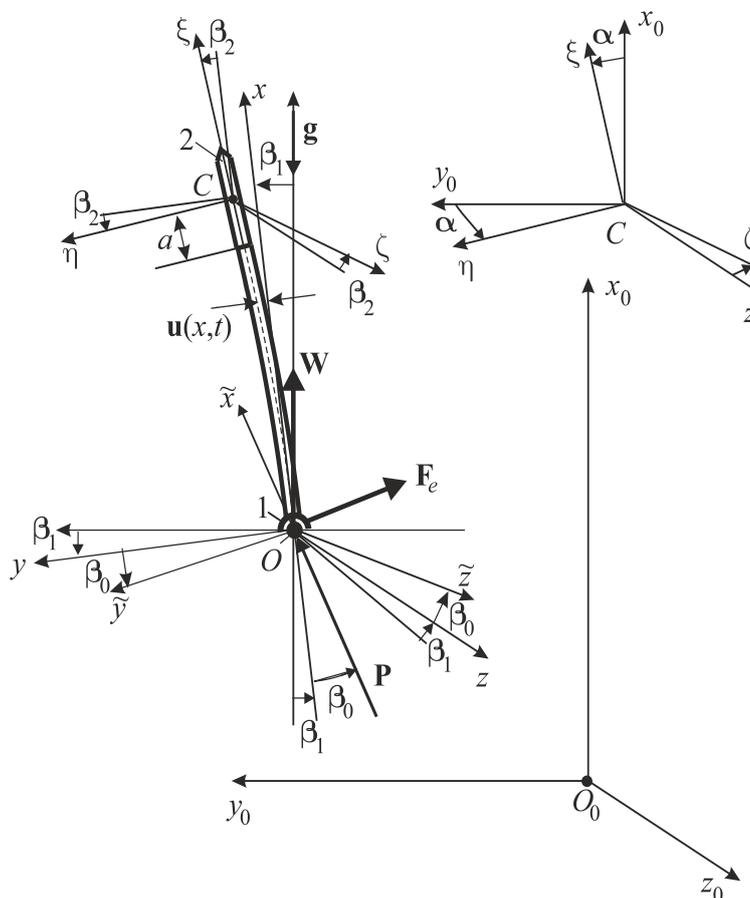


Рисунок 2 - Расчетная схема

тела 0, формируют управляющие моменты сил, разворачивающие тело 0 (т.е. реактивный двигатель) относительно тела 1. Ввиду громоздкости модельных уравнений в автореферате они не приводятся. Получены передаточные функции системы стабилизации объекта относительно вертикали. Конкретизированы алгоритм параметрического синтеза системы стабилизации относительно вертикали, в том числе и адаптивный алгоритм параметрического синтеза семейства линеаризованных моделей системы стабилизации. Конкретизированы алгоритм моделирования выходных вектор-функций нелинейной КДС и «быстрый» алгоритм вычисления матрицы Якоби.

В четвертой главе приведены результаты численного моделирования областей устойчивости, а также результаты параметрического синтеза системы угловой стабилизации подвижного объекта управления и численного моделирования ее выходных вектор-функций. Показано, что при фиксированном значении характерной перегрузки выполнение параметрического синтеза по линеаризованной модели успешно компенсирует ошибки системы стабилизации и позволяет стабилизировать исходную нелинейную КДС. При этом основное влияние на выходные вектор-функции оказывает нелинейность типа насыщения. Пока-

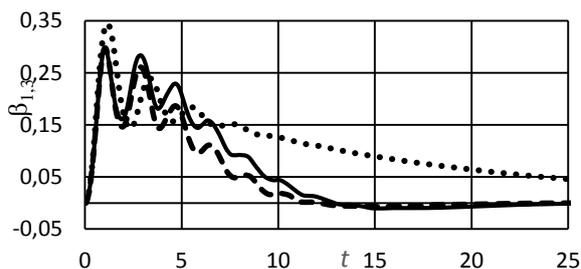
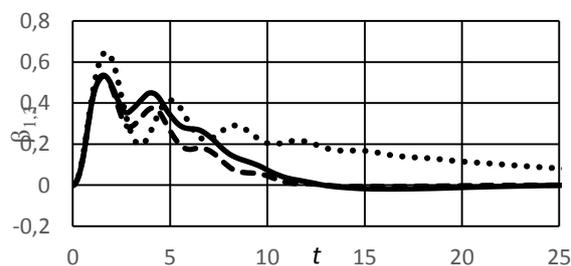
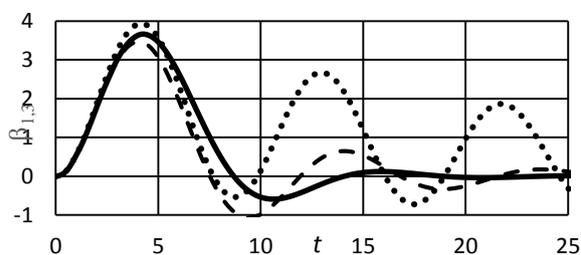


Рисунок 3 - Переходные функции

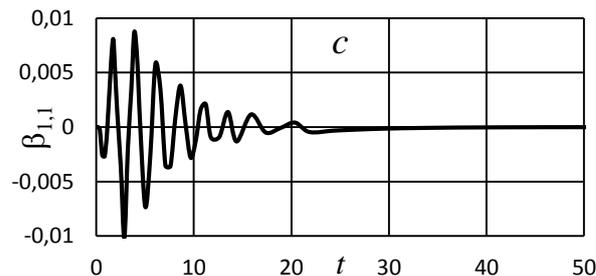
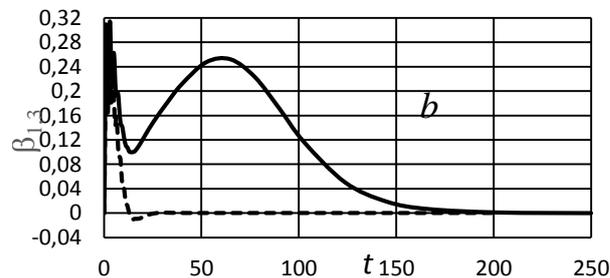
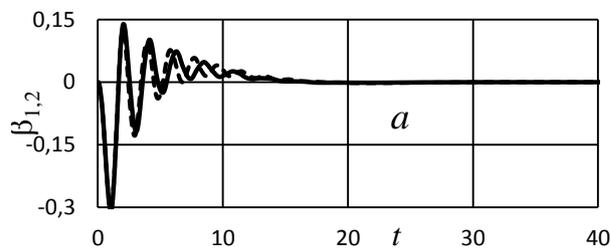


Рисунок 4 - Выходные функции

зано, что в случае плавного изменения характерной перегрузки в некотором диапазоне параметрический синтез семейства линеаризованных моделей систем стабилизации также позволяет компенсировать ошибки системы стабилизации. Для различных значений характерной перегрузки переходные функции приведены на рис. 3. При этом, из-за малой протяженности областей устойчивости в пространстве параметров обратных связей, адаптивный алгоритм оказывается более эффективным.

В свою очередь, параметрический синтез по линеаризованной модели позволяет стабилизировать исходную нелинейную нестационарную КДС во всем диапазоне изменения перегрузок (рис. 4), а наибольшее влияние на выходные вектор-функции нелинейной нестационарной КДС оказывает плавное изменение характерной перегрузки во времени.

В частности, применение ПИД-регуляторов позволяет стабилизировать объект в направлении вертикали (рис. 4, *a, b*), а использование ПД-регулятора –

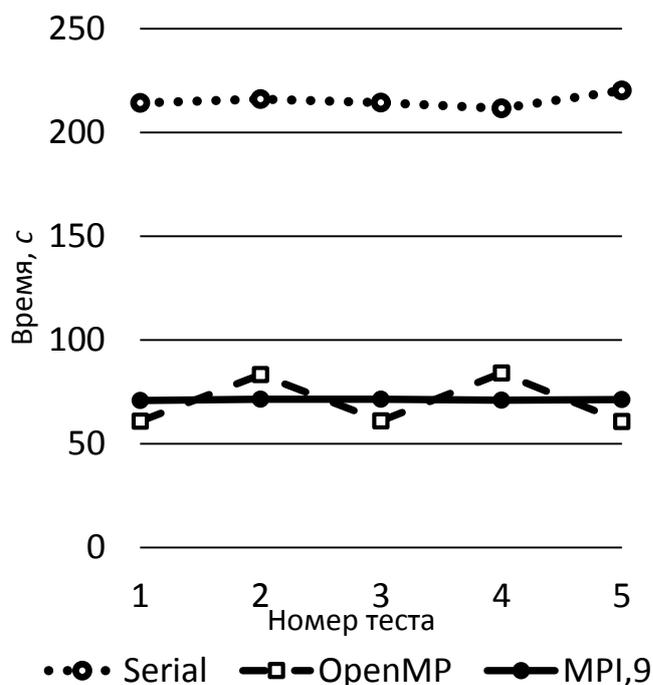


Рисунок 5 - Эффективн. распараллел.

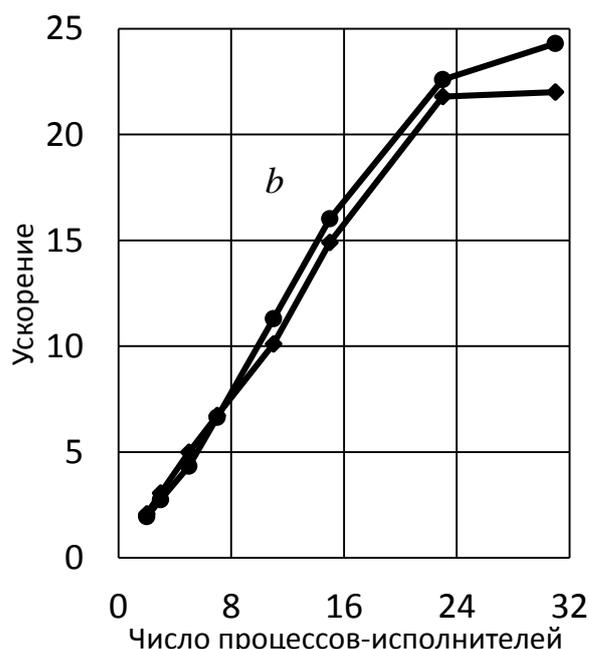
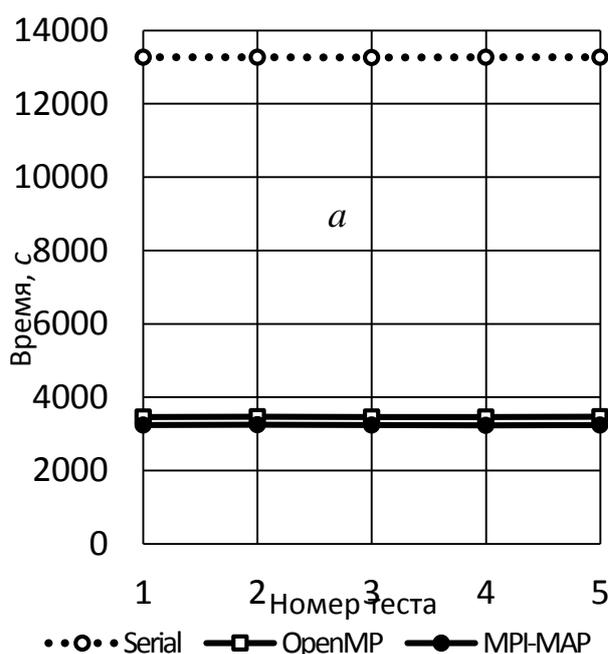


Рисунок 6 – Эффективность распараллеливания вычислений

компенсировать медленно накапливающиеся ошибки, обусловленные типовыми нелинейностями (рис. 4, с).

В пятой главе приведены результаты исследования эффективности сокращения трудоемкости ряда алгоритмов, а также эффективности параллельных алгоритмов анализа и синтеза управляемых комбинированных динамических систем на симметричных мультимикропроцессорных системах с общей памятью, на кластерных системах с распределенной памятью с идентичными и различными характеристиками вычислительных узлов, а также на вычислительных системах с сопроцессорами-ускорителями Intel Xeon Phi.

Установлено, что параллельный алгоритм параметрического синтеза управляемых КДС эффективен на симметричных мультимикропроцессорных системах с общей памятью (рис. 5).

Показано, что параллельный алгоритм параметрического синтеза семейства линеаризованных моделей управляемых КДС эффективен на симметричных

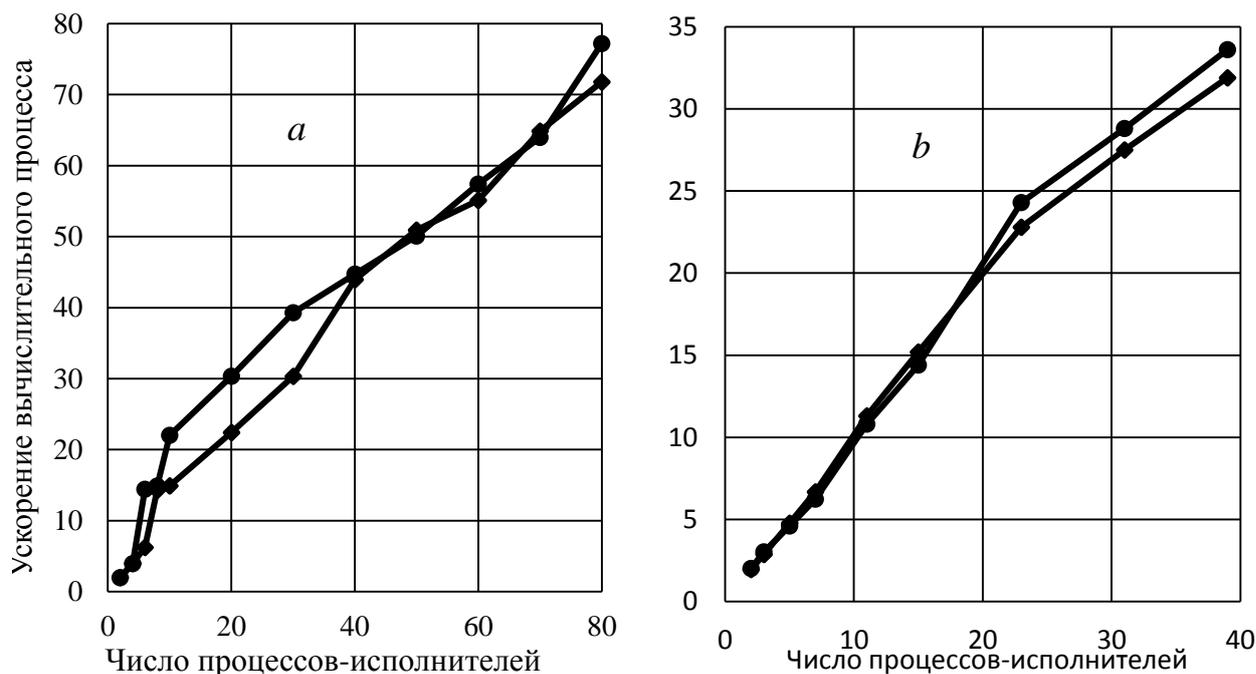
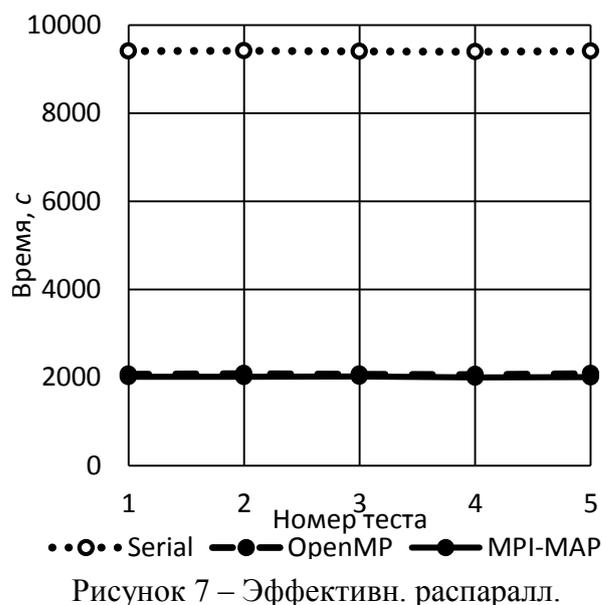


Рисунок 8 – Эффективность распараллеливания вычислений

мультипроцессорных системах с общей памятью (рис. 6, *a*) и на кластерных системах с распределенной памятью (рис. 6, *b*).

В свою очередь, параллельный алгоритм моделирования влияния типовых нелинейностей и нестационарности оказывается эффективным на симметричных мультипроцессорных системах с общей памятью (рис. 7), на кластерных системах с распределенной памятью (рис. 8, *a* – кластерная система с идентичными характеристиками узлов; рис. 8, *b* – кластерная система с различными характеристиками узлов) и на вычислительных системах с сопроцессорами-ускорителями Intel Xeon Phi. В таблице 1 приведены данные, характеризующие эффективность распараллеливания вычислений при моделировании влияния типовых нелинейностей на выходные вектор-функции системы стабилизации на вычислительной системе с сопроцессорами-ускорителями Intel Xeon Phi (сетка изменения параметров нелинейности  $9 \times 9 \times 9$ ).

Таблица 1 - Время моделирования влияния типовых нелинейностей, с. Кластер факультета КНиИТ и ПРЦНИТ СГУ

Процессор, послед./парал.	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 4	Тест 5
Intel Xeon E5-2603 v2, послед.	5175	5180	5169	5182	5178
2 процессора Intel Xeon E5-2603 v2, OpenMP.	673	677	674 <i>b</i>	670	673
Сопроцессор Intel Xeon Phi 5110P, OpenMP	448	445	446	452	442
Сопроцессор Intel Xeon Phi 5110P, MPI	653	636	669	642	663

Для задач со значительными ресурсами параллелизма при относительно невысокой тактовой частоте и пониженном энергопотреблении один сопроцессор-ускоритель Intel Xeon Phi оказывается примерно в полтора раза более эффективным, чем два четырехъядерных процессора Intel Xeon, и, по сравнению с последовательной версией программы, обеспечивает ускорение примерно в 11 раз. При этом, как следует из представленных результатов, наиболее выгодной стратегией распараллеливания вычислений внутри сопроцессора является использование потоков OpenMP. В таблице 2 приведены аналогичные данные, характеризующие эффективность распараллеливания вычислений при моделировании влияния типовых нелинейностей и нестационарности на выходные вектор-функции системы стабилизации (сетка  $6 \times 9 \times 9 \times 9$  изменения параметров, характеризующих типовые нелинейности и нестационарность). Как следует из представ-

ленных результатов, наиболее выгодной стратегией использования сопроцессоров Intel Xeon Phi будет распараллеливание вычислений на основе потоков OpenMP внутри сопроцессора и на основе MPI-MAP – между сопроцессорами.

Таблица 2 - Время моделирования влияния типовых нелинейностей и нестационарности, с. Кластер факультета КНиИТ и ПРЦНИТ СГУ

Процессор, послед./парал.	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 4	Тест 5
Intel Xeon E5-2603 v2, послед.	13284	13296	13269	13299	13280
2 процессора Intel Xeon E5-2603 v2, OpenMP.	2662	2660	2650	2671	2659
Сопроцессор Intel Xeon Phi 5110P, OpenMP	1405	1418	1387	1392	1381
2 сопроцессора Intel Xeon Phi 5110P, MPI-MAP/ OpenMP	871	899	888	860	857

Далее, как следует из результатов, представленных в табл. 3, при увеличении среднего числа узлов по измерению сетки мультипликативный вклад в ускорение паттерна MPI-MAP достаточно быстро стремится к числу используемых сопроцессоров (в данном случае, 2).

Таблица 3 - Время моделирования влияния типовых нелинейностей и нестационарности, с. Кластер факультета КНиИТ и ПРЦНИТ СГУ

Процессор, технол. распаралл.	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 4	Тест 5
Сетка $6 \times 16 \times 16 \times 16$					
Сопроцессор Intel Xeon Phi 5110P, OpenMP	5671	5634	5654	5754	5698
2 сопроцессора Intel Xeon Phi 5110P, MPI-MAP/ OpenMP	2988	2969	2967	3031	3002
Сетка $12 \times 16 \times 16 \times 16$					
Сопроцессор Intel Xeon Phi 5110P, OpenMP	11205	11278	11154	11174	11237
2 сопроцессора Intel Xeon Phi 5110P, MPI-MAP/ OpenMP	5777	5809	5735	5741	5798

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если математические модели объектов управления с распределенными по пространству параметрами учивывают малую, но конечную диссипацию энергии в сплошной среде, то в высокочастотной области характеристический и возмущающие квазимногочлены КДС будут аналитическими функциями в правой комплексной полуплоскости и вблизи мнимой оси.

Асимптотический метод многих масштабов позволяет отобразить КДС со

слабой нелинейностью и нестационарностью в семейство линейных стационарных КДС. Это служит обоснованием стабилизации исходной нелинейной КДС на основе параметрического синтеза по линеаризованной модели.

Параметрический синтез семейства линеаризованных КДС более эффективно выполняется на основе адаптивного варианта данного алгоритма.

При моделировании переходных процессов в нелинейных КДС на основе проекционного метода Галеркина и ФДН-метода «быстрый» алгоритм вычисления матрицы Якоби реализуется на основе применения проекционного метода Галеркина к линеаризованным уравнениям возмущенного движения.

Использование ПИД-регулятора в системе управления позволяет после параметрического синтеза эффективно подавить ошибку системы стабилизации – углы отклонения стабилизируемого объекта от вертикали. Использование ПД-регулятора позволяет стабилизировать угол поворота подвижного объекта относительно продольной оси и компенсировать медленное накопление ошибок за счет нелинейных эффектов.

Наибольшее влияние на ошибки системы стабилизации оказывают нестационарность, связанная с плавным медленным изменением характерной перегрузки, и нелинейность типа насыщения.

Разработанный ранее паттерн MPI-MAP эффективен при использовании как небольшого, так и достаточно большого числа процессов-исполнителей, а также в случае использования в кластерной системе узлов с различными характеристиками.

Параллельный алгоритм параметрического синтеза управляемых КДС эффективен на симметричных мультипроцессорных системах с общей памятью.

Параллельный алгоритм параметрического синтеза семейства линеаризованных КДС эффективен на симметричных мультипроцессорных системах с общей памятью и на кластерных системах с распределенной памятью.

Параллельный алгоритм моделирования влияния типовых нелинейностей на выходные вектор-функции нелинейных КДС эффективен на симметричных мультипроцессорных системах с общей памятью, на кластерных системах с распределенной памятью, а также на вычислительных системах с сопроцессорами-ускорителями Intel Xeon Phi.