Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной информатики
наименование кафедры

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТРЕСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета

Мухортовой Натальи Анатольевны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н		В.В. Корнев
должность, уч. степень, уч. звание	дата, подпись	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой:

д.ф.-м.н., профессор		А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание	дата, подпись	инициалы, фамилия

Саратов 2017 год

Введение. Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз. В.А. Стеклов, впервые давший строгое обоснование метода Фурье, придерживался этой точки зрения. Эта точка зрения сделала метод Фурье очень популярным, было проведено большое количество исследований и достигнуты значительные успехи. В книгах И.Г. Петровского, В.И. Смирнова, О.А. Ладыженской, В.А. Ильина, В.А. Чернятина также можно найти информацию обзорного характера. Недостатком такого подхода является то, что он требует завышения гладкости начальных данных. Выход из этого положения намечен А.Н. Крыловым в его исследованиях по ускорению сходимости рядов Фурье и им подобных. Суть его приема состоит в том, что изучаемый вопрос о дифференцировании ряда решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется (то есть не надо прибегать к почленному дифференцированию), а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать. Им были успешно преодолены трудности, связанные с невозможностью почленного дифференцирования на ряде конкретных прикладных задач. В.А. Чернятин приемом А.Н. Крылова с применением асимптотик для собственных значений и собственных функций успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, а в ряде случаев эти условия стали минимально возможными. Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А.Н. Крылова, В.А. Чернятина, есть качественно новый шаг, позволяющий с исчерпывающей полнотой исследовать смешанные задачи методом Фурье и ставящий много новых важных вопросов и в теории функций.

В настоящей работе рассматривается волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \qquad x \in [0,1], \qquad t \in [0,\infty), \tag{1}$$

при условиях:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u'_t(x,0) = \psi(x). \tag{3}$$

Будем считать, что $q(x), \varphi(x), f(x,t)$ – комплекснозначные функции, причем в первом разделе дипломной работы возьмем $q(x) \in C[0,1]$, а во втором – $q(x) \in L[0,1]$ и для удобства $\psi(x) = 0$. Мы будем исследовать вопросы сходимости формального решения по методу Фурье при всевозможных ограничениях на $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ и устанавливать связь сумм формального решения с решениями задачи (1)-(3).

Этот вопрос активно изучается А.П. Хромовым, который в этой области достиг колоссальных результатов. В качестве примера можно привести ряд работ, на основе которых написана данная магистерская работа.

Цель дипломной работы – показать, что при минимальных предположениях формальный ряд, построенный по методу Фурье, сходится и его сумма есть классическое решение рассматриваемой смешанной задачи.

Основное содержание и структура работы. Дипломная работа состоит из введения, четырех разделов, включающих основной результат, заключения и списка использованных источников.

Первый раздел посвящен обоснованию метода Фурье при получении классического решения в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с комплексным потенциалом и закрепленными краевыми условиями при минимальных требованиях на начальные данные, где используемый резольвентный подход не требует никакой информации о собственных и присоединенных функциях соответствующей спектральной задачи.

Рассматривается волновое уравнение (1) с условиями (2)–(3).

Считаем, что $q(x), \varphi(x), \psi(x), f(x,t)$ – комплекснозначные функции, причем $q(x) \in C[0,1], \varphi(x) \in C^2[0,1], f(x,t) \in C(Q)$.

Необходимыми условиями, при которых это классическое решение существует, таковы:

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0, \tag{4}$$

$$\varphi''(0) + f(0,0) = \varphi''(1) + f(1,0) = 0. \tag{5}$$

Также потребуем, чтобы

$$f'_t(x,t) \in C(Q). \tag{6}$$

Метод Фурье в задаче (1)–(3) связан со спектральной задачей для оператора L. На протяжении всей работы именно эта спектральная задача и будет рассматриваться:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x),$$

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Собственные значения оператора L достаточно большие по модулю и для них верна асимптотика:

$$\lambda_n = \rho_n^2, \qquad \rho_n = n\pi + o(1), \qquad (n = n_0, n_0+1, \dots).$$

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье возьмем в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\le n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)[(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t + \frac{1}{\rho}(R_\lambda\psi)(x)\sin\rho t +$$
$$+ \int\limits_0^t (R_\lambda f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau]d\lambda, \tag{7}$$

где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора L, λ – спектральный параметр, E – единичный оператор.

Теорема 1.1. Если $u(x,t)$ является классическим решением задачи (1)–(3), то для него справедлива формула

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\le n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)[(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t + \frac{1}{\rho}(R_\lambda\psi)(x)\sin\rho t +$$

$$+\int\limits_0^t (R_\lambda f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau]d\lambda,$$

причем ряд сходится равномерно по $x\in[0,1]$ при каждом фиксированном t.

Теорема 1.2. Если в задаче (1)–(3) $f(x,t)=0$, то ряд в (7) сходится абсолютно и равномерно в $Q_T=[0,1]\times[-T,T]$, а формальное решение (7) – классическое решение рассматриваемой задачи.

Теорема 1.3. При выполнении условия

$$f(0,t)=f(1,0)=0$$

классическое решение задачи (1)–(3) в случае $q(x)=\varphi(x)=\psi(x)=0$ существует и дается формулой

$$u_{20}(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left[\int\limits_0^t (R_\lambda^0 f)\frac{sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\right]d\lambda,$$

где $R_\lambda^0 f=(L_0-\lambda E)^{-1}f$, L_0 – оператор L при $q(x)=0$, то есть

$$L_0 y = -y'', \qquad y(0)=y(1)=0.$$

При этом ряд сходится равномерно по $x\in[0,1]$ при любом фиксированном t.

Теорема 1.4 (основной результат).

Пусть выполняются условия (4)–(5) и $f'_t(x,t)\in C(Q)$.

Тогда формальный ряд (7) сходится, а его сумма является классическим решением задачи (1)–(3).

Во втором разделе исследуется смешанная задача для неоднородного волнового уравнения с закрепленными концами в случае суммируемого потенциала.

Также будем рассматривать волновое уравнение (1) с условиями (2)–(3). Будем считать, что $q(x), \varphi(x), f(x,t)$ – комплекснозначные функции, причем $q(x) \in L[0,1]$ и для простоты $\psi(x) = 0$.

Исследование формального решения по методу Фурье проводится на основании резольвентного подхода, связанного с методом контурного интегрирования резольвенты оператора, порождаемого спектральной задачей метода Фурье. При резольвентном подходе не используется уточненная асимптотика собственных значений и никакая информация о собственных и присоединенных функциях. В результате получено классическое решение при минимальных требованиях на $\varphi(x)$, причем такое решение получено и при произвольных двухточечных краевых условиях.

Метод Фурье в задаче (1)–(3) связан со спектральной краевой задачей для оператора Штурма-Лиувилля L [19]. Формальное решение опять же таки берем в виде (7).

Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где $u_1(x,t)$ – решение задачи при $f(x,t) = 0$ и $u_2(x,t)$ решение задачи при $\varphi(x) = 0$.

1 Случай $f(x,t) = 0$. Формальное решение задачи (1) – (3) при этом примет вид:

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda \varphi)\cos \rho t d\lambda.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.1. Пусть $\varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0, L\varphi = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) \in L_2[0,1]$, тогда сумма $u_1(x,t)$ ряда

(5) обладает свойствами:

1) $u_1(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t;

2) $u'_{1x}(x,t)$ ($u'_{1t}(x,t)$) абсолютно непрерывна по x (по t);

3) удовлетворяет (1) при $f(x,t)=0$ почти всюду и (2), (3), то есть является классическим решением задачи (1)-(3), когда (1) удовлетворяется лишь почти всюду.

2 Случай $q(x)=0, \varphi(x)=0$.

$$u_2(x,t) = u_{20}(x,t) + u_{21}(x,t),$$

$$u_{20}(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(\int\limits_0^t (R_\lambda^0 f)\frac{sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\right)d\lambda, \tag{8}$$

$$u_{21}(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(\int\limits_0^t (R_\lambda f - R_\lambda^0 f)\frac{sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\right)d\lambda. \tag{9}$$

Теорема 2.3.3. Если $f(x,t)$, $f'_t(x,t)$ непрерывны и f(0,t)=f(1,t)=0, тогда справедлива формула

$$u_{20}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \Phi(\eta,\tau)d\eta, \tag{10}$$

которая является классическим решением смешанной задачи.

В третьем разделе приведен вспомогательный материал.

В четвертом разделе сформулирован основной результат относительно классического решения смешанной задачи (1)–(3), где $q(x) \in L[0,1]$. Обусловимся, что $\varphi(x), \varphi'(x)$ – абсолютно непрерывны, причем $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, оператор $L\varphi = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) \in L_2[0,1]$, также $f(x,t), f'_t(x,t)$ – непрерывны и выполняются условия

$$f(0,t) = f(1,t) = 0.$$

Формальное решение принимает вид

$$u(x,t) = u_1(x,t) - \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(\int\limits_0^t (R_\lambda^0 f)\frac{sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\right)d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(\int\limits_0^t (R_\lambda f - R_\lambda^0 f)\frac{sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\right)d\lambda,$$

где $u_1(x,t)$ получено в первом рассмотренном случае при $f(x,t)=0$. Также знаем, что ряд u_{20} сходится абсолютно и равномерно по $x,t \in Q_T$ при любом $T>0$ и является классическим решение задачи (1)–(3) при $q(x) = \varphi(x) = 0$.

Теорема 4.1. Если $q(x) \in L[0,1]$, $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $L\varphi(x) \in L_2[0,1]$, $f(x,t), f'(x,t)$ непрерывны при $x \in [0,1]$ и $t \in [0,\infty)$, причем

$$f(0,t) = f(1,t) = 0,$$

то классическое решение задачи (1)–(3) существует и определяется формулой

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_{20}(x,t) + u_{21}(x,t). \tag{11}$$

Заключение. В настоящей работе было дано дальнейшее развитие метода В.А. Чернятина, путем привлечения метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье. Это, в свою очередь, позволило получить классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения при минимальных требованиях на исходные данные, не используя при этом уточненных асимптотик собственных значений и никакой информации о собственных функциях. В применении этот метод более прост, нежели прием В.А. Чернятина, который опирается именно на уточненную асимптотику собственных значений и присоединенных функций.

Таким образом, мы убедились, что при сделанных предположениях, формальное решение рассматриваемой задачи сходится, а его сумма является классическим решением.