

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории  
упругости и биомеханики

**Асимптотические методы исследования погранслоев в вязкоупругих  
тонкостенных оболочках**

**АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 2 курса 237 группы  
направления 01.04.03 – Механика и математическое моделирование  
механико-математического факультета

Бескровной Александры Алексеевны

Научный руководитель  
доцент кафедры МТУ и БМ  
к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_  
дата, подпись

Н. С. Анофрикова

Заведующий кафедрой  
д.ф.-м.н, профессор

\_\_\_\_\_  
дата, подпись

Л. Ю. Коссович

## Введение

В магистерской работе рассматриваются модельные задачи по распространению нестационарных волн в тонкой вязкоупругой оболочке. Задачи по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек находят своё применение в различных областях. Оболочки могут быть приняты в качестве модели сосудов в медицине, куполов и резервуаров в строительстве сооружений, такие конструкции также используются в судостроении, машиностроении, ракетостроении и многих других областях техники. Элементы конструкций часто изготавливают из композиционных, полимерных материалов, поведение которых нельзя описать с помощью модели упругого тела. В отличие от упругого материала, описываемого линейным законом Гука, у вязкоупругого вещества есть и эластичный, и вязкий компонент. При этом основой теории вязкоупругости является предположение о том, что деформация тела в данный момент зависит от всех предшествующих напряжений.

Целью магистерской работы стало исследование погранслоёв в окрестностях фронтов волн в вязкоупругих тонкостенных оболочках, подверженных ударному торцевому воздействию.

Задачи, поставленные в работе:

- постановка трёхмерной задачи о распространении нестационарных волн в тонкостенной вязкоупругой оболочке;
- вывод уравнений погранслоя в окрестности фронта волны расширения методом асимптотического интегрирования;
- решение задачи по нахождению погранслоя в окрестности фронта волны расширения для случая цилиндрической оболочки;
- вывод уравнений погранслоя в окрестности квазифронта методом асимптотического интегрирования;
- решение задачи по нахождению погранслоя в окрестности квазифронта для случая цилиндрической оболочки;

- построению графиков полученных решений и анализ результатов.

В связи с разнообразием геометрии оболочек, в работе выбраны для исследования оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны. Под такими оболочками понимаются цилиндрические и конические оболочки, а также пластины. В качестве модели материала выбрана модель стандартного вязкоупругого тела.

Стоит отметить, что поставленные в магистерской работе задачи являются модельными, и их решения могут быть использованы для решения более сложных задач биомеханики, строительства и других областей.

**Структура и объём работы.** Магистерская работа состоит из введения, четырех основных разделов и заключения и содержит 70 страниц. Список использованных источников включает 33 наименования.

Основная часть имеет следующую структуру:

1. Постановка задачи.
2. Классификация асимптотических приближений.
3. Погранслои в окрестности фронта волны расширения.
4. Погранслои в окрестности квазифронта.

Практическая значимость работы заключается в расширении области применения асимптотических методов изучения нестационарного напряженно-деформированного состояния, разработанных для упругих тонкостенных оболочек, на случай вязкоупругих оболочек.

#### **Основное содержание работы**

Магистерская работа посвящена построению и изучению решений для погранслоя в окрестности фронта волны расширения и в окрестности квазифронта в вязкоупругой тонкостенной цилиндрической оболочке.

Во введении проводится обзор работ, посвящённых исследованию поведения тонкостенных конструкций, подверженных ударному воздействию,

также приводятся основные положения из теории упругости и теории вязкоупругости.

В первом разделе выполняется постановка трехмерной задачи о распространении нестационарных волн в вязкоупругой тонкостенной оболочке в общем случае. Приводятся точные трёхмерные уравнения состояния для модели стандартного вязкоупругого тела [1], уравнения движения для оболочки произвольного очертания. Уравнения записываются в криволинейной триортогональной системе координат, связанной со срединной поверхностью оболочки. Уравнения состояния берутся в дифференциальной форме. Предполагается, что материал удовлетворяет условию упругого объемного расширения. Ставятся граничные условия на лицевых поверхностях оболочки, соответствующие отсутствию на них нагрузок.

В трехмерной постановке задача не имеет аналитического решения, поэтому из трехмерных уравнений методом асимптотического интегрирования выводятся приближенные уравнения для составляющих НДС для двух случаев: погранслоя в окрестности фронта волны расширения и погранслоя в окрестности квазифронта. При этом в качестве малого параметра используется относительная полутолщина оболочки, равная отношению ее полутолщины к характерному значению радиуса кривизны ее срединной поверхности.

Во втором разделе приведена существующая классификация асимптотических приближений [2,3]. Вводятся скорость волны сдвига, скорость волны расширения, понятия показателей динамичности и изменемости, на основании которых и строится приведенная классификация.

Третий раздел посвящен выводу уравнений погранслоя в окрестности фронта волны расширения и решению начально-краевой задачи для полученных уравнений. Вывод уравнений погранслоя в окрестности фронта волны расширения проводится на примере оболочки вращения. Для вывода уравнений методом асимптотического интегрирования выполняется переход к характеристическим

переменным с учетом рассматриваемой области решения. Предварительно функции, входящие в соотношения, раскладываются в тригонометрические ряды по окружной координате, что позволяет в уравнениях исключить зависимость от нее. Затем в уравнения вводятся асимптотики для искомых функций. В результате отбрасывания членов, малых в пределах выбранной точности, получаем системы разрешающих уравнений для асимптотически главных и асимптотически второстепенных компонент НДС.

Ставится начально-краевая задача для выведенных уравнений, с учетом предположения о приложении к торцу оболочки нормального продольного усилия. Задача решается для случая цилиндрической оболочки. Поставленная задача записывается в безразмерной форме, производится переход к новым искомым функциям.

Решение поставленной задачи производится с помощью последовательного применения двух интегральных преобразований: Лапласа по переменной времени и синус-, косинус-преобразования Фурье по нормальной координате. В результате от задачи в частных производных второго порядка для функции трех независимых переменных осуществляется переход к задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдено решение в изображениях для нормального продольного усилия.

Обращение изображений производится с помощью формул обратного перехода, опираясь на понятие вычетов и разложение функции по обратным степеням параметра преобразования Лапласа с последующим обращением с помощью таблиц интегральных преобразований. Далее приводятся графики, отображающие зависимость приведённого значения нормального усилия для различных значений безразмерного времени. Анализ графиков позволяет сделать выводы об изменениях решения с ростом времени.

В четвёртом разделе производится вывод и решение задачи для погранслоя в окрестности квазифронта. Для этого вводится понятие квазифронта, приводится

выражение для скорости его волны. Используя соответствующие этому случаю безразмерные переменные и асимптотики, а также опираясь на систему разрешающих уравнений, полученных ранее для оболочки вращения, выводятся приближенные уравнения для асимптотически главных и асимптотически второстепенных компонент НДС с учетом выбранной точности.

Выведенные уравнения для асимптотически главных компонент НДС решаются с помощью интегрального преобразования Лапласа по переменной времени. В качестве граничных условий добавляются условия, соответствующие приложению к торцу оболочки ударного продольного воздействия тангенциального типа. Получено решение для нормального продольного усилия в изображениях. Обращение изображения производится с помощью формулы Меллина и метода контурного интегрирования. В результате установлено, что оригинал нормального продольного усилия выражается через функцию Эйри. Построенные графики зависимости приведённого значения нормального продольного усилия для различных времен, позволяют сделать выводы об изменении решения с ростом времени.

### **Заключение**

В магистерской работе было исследовано использование асимптотических методов в динамике оболочек вращения нулевой гауссовской кривизны. При этом предполагалось, что оболочка изготовлена из вязкоупругого материала. В качестве малого параметра был выбран параметр тонкостенности.

Из трехмерных уравнений теории вязкоупругости были выведены приближенные уравнения, описывающие решение исходной задачи в окрестности фронта волны расширения и квазифронта.

Полученные приближенные уравнения использовались для постановки задач об определении решения в указанных областях при условии воздействия на торец оболочки ударных нагрузок. Для решения задач применялись интегральные преобразования по переменной времени (интегральное преобразование Лапласа) и

по нормальной координате (интегральные синус- и косинус-преобразования Фурье). Свойства погранслоев в окрестностях фронтов волн расширения и квазифронта были изучены на примере нормального продольного усилия.

Построенные графики решения позволили сделать вывод об изменении решения исследуемых задач с ростом времени.

#### **Список использованных источников**

1. Новацкий, В. Динамика сооружений / В. Новацкий. М.: Госстройиздат, 1963. 376с.
2. Kaplunov, J. D. Dynamics of thin walled elastic bodies / J. D. Kaplunov, L. Y. Kossovich, E. V. Nolde. San-Diego: Academic Press, 1998. P. 226.
3. Коссович, Л. Ю. Асимптотические методы в динамике оболочек при ударных воздействиях / Л. Ю. Коссович // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, № 2. С. 12–33.