

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории  
упругости и биомеханики

**Нестационарные двумерные волны в наследственно-упругих двухслойных  
пластинах**

**АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 2 курса 237 группы  
направления 01.04.03 – Механика и математическое моделирование  
механико-математического факультета

Бескровного Александра Сергеевича

Научный руководитель  
доцент кафедры МТУ и БМ,  
к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_  
дата, подпись

Н. С. Анофрикова

Заведующий кафедрой  
д.ф.-м.н, профессор

\_\_\_\_\_  
дата, подпись

Л. Ю. Коссович

## **Введение**

Большое количество материалов, используемых в строительстве и технике, обладает наследственно-упругими свойствами. Поэтому проблемы наследственной теории упругости привлекают в последнее время особое внимание многих исследователей и инженеров в связи с использованием полимерных материалов и пластмасс в различных отраслях производства и строительной индустрии.

Исследование волновых процессов в наследственно-упругих средах является весьма сложной проблемой, что связано, главным образом, со сложностью математической постановки динамических задач наследственной теории упругости.

Сложность уравнений теории наследственной упругости, в частности для двухслойных пластин, не позволяет получить точные аналитические решения, и поэтому используются различные приближенные методы, основанные на приближении как исходных уравнений, так и решений.

**Целью магистерской работы является** построение и исследование с помощью аналитических методов уравнений для двумерных составляющих в наследственно-упругих двухслойных пластинах.

**Задачами выполняемой работы являются:**

- 1) постановка трехмерной задачи о распространении нестационарных волн в двухслойной полубесконечной пластине, выполненной из наследственно-упругих материалов при ударном продольном воздействии на ее торец;
- 2) построение с помощью метода асимптотического интегрирования низкочастотных длинноволновых тангенциальных приближений трехмерных уравнений наследственной теории упругости;
- 3) построение с помощью метода асимптотического интегрирования низкочастотных длинноволновых поперечных приближений трехмерных уравнений наследственной теории упругости;

- 4) решение краевых задач для безмоментной и изгибной составляющих для случая нагрузки, симметричной по поперечной координате;
- 5) анализ влияния параметров наследственности на поведение решений.

**Структура и объём работы.** Магистерская работа состоит из введения, трех разделов и заключения и содержит 54 страницы. Список использованных источников включает 36 наименований.

Раздел 1. Постановка задачи.

Раздел 2. Построение низкочастотных длинноволновых приближений трехмерных уравнений.

Раздел 3. Решение краевых задач для двумерных составляющих напряженно-деформированного состояния.

Практическая значимость работы состоит в расширении области применимости аналитических методов исследования нестационарного напряженно-деформированного состояния на случай наследственно-упругих двухслойных пластин.

### **Основное содержание работы**

Магистерская работа посвящена построению и исследованию с помощью аналитических методов уравнений для двумерных составляющих в наследственно-упругих двухслойных пластинах.

Во введении проводится обзор работ, посвящённых выбору ядра интегрального оператора [1-3], асимптотическим методам [4-15], методике построения низкочастотных длинноволновых тангенциальных и поперечных приближений [16, 17], определению двумерной безмоментной составляющей [18, 19].

В первом разделе приводится постановка трехмерной задачи о распространении нестационарных волн в наследственно-упругой полубесконечной двухслойной пластине, подверженной ударным продольным воздействиям тангенциального и поперечного типов.

Выбирается соответствующая рассматриваемой геометрии тела декартова система координат, связанная со срединной поверхностью пластины. Приводятся трехмерные уравнения движения и соответствующие выбранной модели трехмерные уравнения состояния в интегральной форме.

Начально-краевая задача дополняется граничными условиями, в соответствии с рассматриваемой нагрузкой: на торце задаются нормальные напряжения. Ударная нагрузка моделируется единичной функцией Хевисайда. Предполагается, что наружные поверхности пластины свободны от нагрузки, поэтому напряжения на них полагаются равными нулю. Условие непрерывного контакта задается равными перемещениями и напряжениями слоев на стыке [20].

Рассматривается случай, когда оболочка находилась в состоянии покоя до момента приложения нагрузки, поэтому начальные условия также берутся нулевыми.

Вопрос выбора ядра наследственности для адекватного отображения зависимости между напряжениями и деформациями в материалах с наследственно-упругими свойствами является одним из важных. В работах [21-29] приводятся различные ядра интегрального оператора для описания свойств материала. При решении задачи в качестве ядра интегрального оператора используется простейшее и в то же время достаточно общее слабосингулярное ядро Ржаницына [27]. Параметры для ядра Ржаницына берутся из статей [28, 35].

Поскольку в трехмерной постановке задача не имеет точного аналитического решения, то в качестве метода исследования предлагается метод асимптотического интегрирования, основанный на малости геометрического параметра относительной полутолщины пластины.

Второй раздел посвящен построению низкочастотных длинноволновых приближений трехмерных уравнений.

Для применения метода асимптотического интегрирования в уравнения, начальные и граничные условия вводятся безразмерные переменные [20] и безразмерные параметры с учетом их интенсивностей.

Предполагается, что дифференцирование по безразмерным переменным и интегрирование не меняет асимптотический порядок неизвестных величин.

Для случая тангенциального приближения вводятся соответствующие асимптотики для компонент напряженно-деформированного состояния (НДС) [15].

В уравнения движения и состояния подставляются выбранные асимптотики. Приближенные уравнения строятся с заданной точностью. Отбрасывание членов порядка выбранной точности и старше в уравнениях, записанных в безразмерной форме, и интегрирование полученных уравнений по нормальной координате позволяет установить зависимость компонент НДС от нормальной координаты.

Переход в граничных условиях к выбранным асимптотикам позволяет установить связь между компонентами слоев.

Подстановка полученных зависимостей в трехмерные определяющие безразмерные уравнения и интегрирование полученных уравнений с учетом связи между компонентами слоев позволяет получить двумерные уравнения относительно асимптотически главных компонент НДС в случае тангенциального приближения. Уравнения записываются в усилиях и перемещениях срединной поверхности пластины.

В случае поперечного приближения вводятся соответствующие асимптотики для компонент НДС [20].

Проводя действия, аналогичные построению тангенциальных приближений с учетом введенных асимптотик выводятся двумерные уравнения относительно асимптотически главных компонент НДС в случае поперечного приближения. Уравнения записываются в усилиях, моментах и перемещениях срединной поверхности пластины.

Третий раздел посвящен решению выведенных во втором разделе уравнений для случая симметричной нагрузки на торце наследственно-упругой двухслойной пластины.

К упрощенным уравнениям добавляются соответствующие постановке задачи двумерные начальные и граничные условия.

Для определения безмоментной составляющей применяется интегральное преобразование Лапласа по временной переменной [30]. Вводится определение свертки двух функций, операции умножения для операторов [31] и применяется теорема о свертке [32]. Подстановка найденного решения для изображения продольного перемещения в выражение для изображения нормального продольного усилия позволяет удовлетворить граничному условию в изображениях.

Для обращения изображение нормального продольного усилия раскладывается в ряд по отрицательным степеням параметра интегрального преобразования и полученные ряды обращаются почленно с помощью таблиц интегральных преобразований Лапласа [33] и теоремы о сдвиге [34]. Решение для нормального продольного усилия выражается через кратные интегралы вероятностей [34].

Построенные графики приведенных значений нормального продольного усилия относительно продольной координаты для различных значений времен и физико-механических свойств материалов слоев позволяют установить влияние параметров наследственной упругости на поведение решения.

В случае определения изгибной составляющей ход решения аналогичен определению безмоментной составляющей. Ищется решение в изображениях для изгибающего момента.

Для обращения изображение раскладывается в ряд по отрицательным степеням параметра интегрального преобразования и полученные ряды обращаются почленно с помощью таблиц интегральных преобразований Лапласа [33]. Решение для изгибающего момента выражается через специальные функции, определяемые через интегралы Френеля [34].

Построенные графики приведенных значений изгибающего момента относительно продольной координаты для различных значений времен и физико-механических свойств материалов слоев позволяют установить влияние параметров наследственной упругости на поведение решения.

### **Заключение**

Проблемы наследственной теории упругости актуальны в наши дни, так как в строительстве и технике используются различные материалы, обладающие наследственно-упругими свойствами. Исследование волновых процессов в наследственно-упругих средах является весьма сложной проблемой. Во избежание сложностей произведен анализ работ, которые посвящены асимптотическим методам, методике построения низкочастотных длинноволновых тангенциальных и поперечных приближений, определению двумерной безмоментной составляющей и работ, в которых поднимается вопрос о выборе ядра интегрального оператора.

В магистерской работе для построения уравнений и исследования нестационарного волнового напряженно-деформированного состояния в двухслойной пластине при ударных продольных воздействиях используются асимптотические методы. Рассмотрена пластина, выполненная из наследственно-упругих материалов, для описания свойств которых в качестве ядра интегрального оператора используется функция Ржаницына.

Основные результаты исследований заключаются в следующем:

- 1) с помощью метода асимптотического интегрирования построены низкочастотные длинноволновые тангенциальные и поперечные приближения трехмерных уравнений наследственной теории упругости;
- 2) решены краевые задачи для безмоментной и изгибающей составляющих для случая нагрузки, симметричной по поперечной координате;
- 3) произведен анализ влияния параметров наследственности на поведение решений.

Выведенные приближенные уравнения могут быть использованы для исследования процессов распространения нестационарных волн в конечных, полубесконечных и бесконечных двухслойных наследственно-упругих пластинах.

Результаты исследований опубликованы в статье [36].

#### **Список использованных источников**

1. Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. С. 384.
2. Ржаницын, А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформируемых во времени / А. Р. Ржаницын. – М.: ГИТТЛ, 1949. – С. 252.
3. Гольдман, А. Я. Прочность конструкционных пластмасс / А. Я. Гольдман. – Л.: Машиностроение. Ленинградское отделение, 1979. – С. 320.
4. Каплунов, Ю. Д. Распространение нестационарных упругих волн в оболочке общего очертания / Ю. Д. Каплунов. – 1992. – № 6. – С. 156-167.
5. Каплунов, Ю. Д. Асимптотический анализ нестационарных упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях / Ю. Д. Каплунов, Л. Ю. Коссович. – 2001. – Vol. 1.
6. Anofrikova, N. S. Non-stationary waves in thin walled bodies at shock loading: asymptotic approach / N. S. Anofrikova, L. Y. Kossovich, I. V. Kirillova, Y. V. Shevtsova // Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics. Elite Publishing House Ltd. – 2011. – no. 17. – Pp. 318-330.
7. Анофрикова, Н. С. Приведенные граничные условия для упругой полуплоскости с тонким вязкоупругим покрытием / Н. С. Анофрикова, Д. А. Приказчиков // Наука и образование. – 2012. – № 11. – С. 477–483.
8. Коссович, Л. Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек / Л. Ю. Коссович. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1976. – С. 176.
9. Kaplunov, J. D. Dynamics of thin walled elastic bodies / J. D. Kaplunov, L. Y. Kossovich, E. V. Nolde. – San-Diego: Academic Press, 1998. – P. 226.



10. Коссович, Л. Ю. Асимптотические методы в динамике оболочек при ударных воздействиях / Л. Ю. Коссович // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Т. 8, № 2. – С. 12-33.
11. Анофрикова, Н. С. Низкочастотные длинноволновые тангенциальные приближения трехмерных динамических уравнений теории вязкоупругости для случая двухслойных пластин / Н. С. Анофрикова, Ю. В. Шевцова // Математика. Механика. – 2010. – № 12. – С. 122-126.
12. Бажанова, Н. С. Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках: модель Максвелла / Н. С. Бажанова, Л. Ю. Коссович, М. С. Сухоловская // Изв. высш. учеб. завед. Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. – 2000. – № 2. – С. 17-24.
13. Kossovich, L. Y. Flexural transient waves in shells of revolution: An asymptotic approach / L. Y. Kossovich, Y. A. Parfenova // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik ZAMP. – 2000. – № 51. – Pp. 611-626.
14. Коссович, Л. Ю. Асимптотический анализ нестационарного напряженно-деформируемого состояния тонких оболочек вращения при торцевых ударных воздействиях нормального типа / Л. Ю. Коссович // Вестник Нижегородского университета им Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4. – С. 2267-2268.
15. Вильде, М. В. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки / М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович, Ю. В. Шевцова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12, № 2. – С. 56-64.
16. Нетребко, А. В. Проявление вязкоупругих свойств материала в нестационарных задачах динамики цилиндрических оболочек / А. В. Нетребко, С. Г. Пшеничнов // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – Т. 2, № 1. – С. 80-95.
17. Ходжаев, Д. А. Нелинейные колебания вязкоупругой пластины с сосредоточенными массами / Д. А. Ходжаев, Б. Х. Эшматов // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – № 6. – С. 158-169.

18. Анофрикова, Н. С. Определение нормального продольного усилия в трехслойной вязкоупругой пластине / Н. С. Анофрикова, В. С. Белицкая // Математика. Механика. – 2015. – № 17. – С. 91-94.
19. Шевцова, Ю. В. Асимптотические приближения трёхмерных динамических уравнений теории упругости в случае двухслойных пластин / Ю. В. Шевцова, Л. Ю. Коссович // Межвуз. сб. "Проблемы прочности и пластичности". – 2005. – С. 102-111.
20. Анофрикова, Н. С. Низкочастотные длинноволновые приближения трехмерных динамических уравнений для случая двухслойной вязкоупругой пластины / Н. С. Анофрикова, М. В. Вильде // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2009. – Т. 19, № 2. – С. 99-106.
21. Тында, А. Н. Численное решение нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с дробно-экспоненциальными ядрами реологических моделей вязкоупругой среды / А. Н. Тында, А. Е. Романова // Известия Иркутского государственного университета. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 69-80.
22. Горбунов, С. В. Математическая модель вязкоупругого разупрочняющегося материала с экспоненциальным ядром ползучести / С. В. Горбунов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2012. – Т. 26, № 1. – С. 150-156.
23. Горбунов, С. В. Экспериментальная проверка реологической модели разупрочняющейся вязкоупругой среды с экспоненциальным ядром ползучести / С. В. Горбунов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2012. – Т. 28, № 3. – С. 196-198.
24. Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. – Наука, 2014. – С. 754.
25. Шевцова, В. В. О выборе типа ядра интегрального уравнения релаксации напряжений в древесных материалах / В. В. Шевцова, А. Р. Бирман, Е. В. Ефимова // Системы. Методы. Технологии. – 2012. – Т. 28, № 3. – С. 196-198.

26. Зезин, Ю. П. Исследование релаксационных свойств эластомерных композитов / Ю. П. Зезин // Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел — научное наследие Ю. Н. Работнова. — 2014. — С. 47-52.
27. Колтунов, М. А. Ползучесть и релаксация / М. А. Колтунов. — М.: Высшая школа, 1976. — С. 276.
28. Абдикоримов, Р. А. Математическое моделирование и расчет гидротехнических сооружений типа плотины-пластины с учетом сейсмической нагрузки и гидродинамического давления воды / Р. А. Абдикоримов, Х. Эшматов, Ш. П. Бобанзаров, Д. А. Ходжаев, Б. Х. Эшматов // Инженерно-строительный журнал. — 2011. — № 3. — С. 59-90.
29. Бадалов, Ф. Б. Численное исследование влияния реологических параметров на характер колебаний наследственно-деформируемых систем / Ф. Б. Бадалов, А. Абдукоримов, Б. А. Худаяров // Вычислительные технологии. — 2007. — Т. 12, № 4. — С. 17-26.
30. Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — Наука, 1969. — Т. 1. — С. 344.
31. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. — М.: Наука, 1988. — С. 712.
32. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. — М.: Рольф, 2000. — С. 238-246.
33. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — БХВ-Петербург, 2011. — С. 1232.
34. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — С. 832.
35. Абдикаримов, Р. А. Численное исследование нелинейных колебаний вязкоупругих пластин переменной толщины / Р. А. Абдикаримов, Д. П. Голоскоков // Журнал университета водных коммуникаций. — 2011. — № 2. — С. 102-107.

36. Анофрикова, Н. С. Построение низкочастотных длинноволновых приближений трехмерных уравнений наследственной теории упругости для случая двухслойной пластины / Н. С. Анофрикова, А. С. Бескровный // Математика. Механика. – 2017. – № 19. – (Принято в печать).