Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

наименование кафедры

Некоторые теоремы вложения для пространств Соболева.

название темы выпускной квалификационной работы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 422 группы

направления 02.03.01 математика и компьютерные науки

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Кулешова Максима Игоревича

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.		Сахно Л. В.
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

профессор, д.ф.-м.н.		Прохоров Д.В.
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. Теория вложения пространств дифференцируемых функций многих действительных переменных сложилась как новое направление математики в 30-е годы в результате работ С. Л. Соболева. Данная теория направлена на изучение важных связей и соотношений дифференциальных свойств функций в различных метриках, имеет также множество существенных применений в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

В последующие годы теория вложения интенсивно развивалась в различных направлениях силами многих математиков и получила новые интересные и важные применения. В теории функциональных пространств, теории дифференциальных уравнений, в краевых задачах математической физики и в теории приближений важную роль играют теоремы вложения пространств дифференцируемых функций.

Целями данной работы являются вложение пространства W_p^l при несоответствии l типу области и сравнение результатов для пространств $W_p^{(l)}$ и W_p^{l1}. А также наглядное представление соответствия области условию l-рога, которое представим с помощью кода, написанного в программе Wolfram Mathematica.

В первой главе рассмотрим пространства L_p с некоторыми свойствами, также в этой главе рассмотрим основные интегральные неравенства с которыми мы будем работать. Во второй главе введены основные понятия, посвященные обобщенным производным в смысле Соболева, и их свойства. Также в этой главе получим интегральные представления дифференцируемых функций, введем понятие l-рога и рассмотрим области определения функций с различными условиями l-рога. В третьей главе рассмотрим анизотропные пространства Соболева и их свойства. В четвертой главе основываясь на утверждения, теоремы и некоторые определения первых трех глав докажем одну из основных теорем: "Вложения пространства W_p^l при несоответствии l типу области". В пятой главе сравним результаты для пространств $W_p^{(l)}$ и W_p^{l1}.

Основное содержание работы.

1. Интегральные неравенства.

Сформулируем основные свойства пространств $L_p(G)$ вещественных функций $f(x)$, определённых на измеримом, не обязательно ограниченном множестве $G \subset E^n$, где E^n – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, ..., x_n)$. Измеримость этих множеств понимается в смысле Лебега.

Также приведем основные интегральные неравенства, используемые в дальнейшем.

1.1. Пространства L_p.

Теорема 1.1.1. Пусть $G = G' \times G''$, $p = (p_1, \ \dots, \ p_n)$ $(1 \le p \le \infty)$, $f, \ f_k \in L_p(G)$ $(k = 1, \ \dots)$ и

$$\lim_{k \to \infty} ||f_k - f||_{p,\,G} = 0.$$

Пусть, кроме того, для некоторого $q = (q_1, \ \dots, \ q_m)$ $(1 \le q \le \infty)$ и некоторой функции $f^*(x)$ выполняется равенство

$$\lim_{k \to \infty} ||f_k(\cdot, \ x'') - f^*(\cdot, \ x'')||_{q,\,G'} = 0$$

для почти всех $x'' \in G''$.

Тогда $f = f^*$, т.е. функции $f(x)$ и $f^*(x)$ эквивалентны на G.

Функция $f(x)$ определена на измеримом множестве G, доопределим ее нулем на множестве $E^n \setminus G$.

Определение. *Функция $f \in L_p(G)$ называется непрерывной в целом в $L_p(G)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что*

$$||f(\cdot + y) - f||_{p,\,E^n} < \varepsilon,$$

как только $|y| < \delta$, где $|y| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 1.1.2. Всякая функция $f \in L_p(G), \ 1 \le p < \infty$, непрерывна в целом в $L_p(G)$.

Если некоторые компоненты вектора p равны бесконечности, то указанное утверждение не верно.

Определение. *Функция $\varphi(x)$ называется финитной в G, если она определена на G и имеет компактный носитель, лежащий в G.*

Определение. *Носителем функции называется замыкание множества всех точек, где она не равно нулю. Носитель функции φ обозначается* *supp* φ. *Если supp* $\varphi \subset G$, *то говорят, что функция* $\varphi(x)$ *сосредоточена в* G.

Пусть $C^\infty(G)$ - множество бесконечно дифференцируемых на G функций, а $C_0^\infty(G)$ - множество таких функций из $C^\infty(G)$, которые финитны в G.

Определение. *Множество* S *пространства* $L_p(G)$ *называется плотным в* $L_p(G)$, *если для любой функции* $f \in L_p(G)$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется элемент* $\varphi_\varepsilon \in S$ *такой, что*

$$||\varphi_\varepsilon - f||_{p,\,G} < \varepsilon.$$

Теорема 1.1.3. *Множество* $C_0^\infty(G)$ *плотно в* $L_p(G)$, *если* $1 \le p < \infty$. *Таким образом, для каждой функции* $f \in L_p(G)$ $(1 \le p < \infty)$ *существует последовательность функций* $\varphi_k \in C_0^\infty(G)$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} ||\varphi_k - f||_{p,\,G} = 0.$$

1.2. Основные интегральные неравенства.

Неравенство Гёльдера. *Пусть* $1 \le p \le \infty,\ f_1 \in L_p(E^n),\ f_2 \in L_{p'}(E^n)$. *Тогда функция* $f_1(x)f_2(x)$ *интегрируема по* E^n *и имеет место неравенство Гёльдера*

$$\int\limits_{E^n} |f_1(x)f_2(x)|dx \le ||f_1||_p ||f_2||_{p'}. \tag{1.2.1}$$

Неравенство Минковского. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $f_i \in L_p(E^n)$, *где* $i = 1, \ \ldots, \ m$. *Тогда* $\{f_1 + \cdots + f_m\} \in L_p(E^n)$ *и справедливо неравенство Минковского*

$$\left\| \sum_{i=1}^m f_i \right\|_p \le \sum_{i=1}^m ||f_i||_p. \tag{1.2.6}$$

Неравенство Юнга. Пусть p, q, r – вещественные числа, удовлетворяющие условиям

$$1 \le p \le q \le \infty,\ 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}, \tag{1.2.11}$$

и пусть $f(x)$ и $K(x)$ – функции одной переменной, заданные на E^1,
$f \in L_p(E^1)$, $K \in L_r(E^1)$,

$$\mathcal{J}(x) = \int\limits_{E^1} f(y)K(y-x)dy.$$

Тогда

$$\left\|\mathcal{J}\right\|_q \leq \left\|K\right\|_r \left\|f\right\|_p. \tag{1.2.12}$$

Неравенство Харди - Литтлвуда. Пусть $1 < p < q < \infty$,
$\mu = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q},\ f \in L_p(E^1)$,

$$\mathcal{J}(x) = \int\limits_{E^1} f(y) \left|y-x\right|^{-\mu} dy.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left\|\mathcal{J}\right\|_q \leq K(p,\ q) \left\|f\right\|_p. \tag{1.2.16}$$

2. Интегральные преобразования дифференцируемых функций.

Вводится понятие и формулируются некоторые свойства обобщенной производной по С.Л. Соболеву, даются определения классов областей, рассматриваемых в дальнейшем.

Усреднение функций.

Лемма 2.1.1. *Если* $f \in L_p(G)$ $(p = (p_1,\ \ldots,\ p_n))$, *то*

$$||f_{v^\lambda}||_p \leq ||K||_1 ||f||_p \ (1 \leq p \leq \infty), \tag{2.1.7}$$

$$\lim_{v \to 0} ||f_{v^\lambda} - f||_p = 0 \ (1 \leq p \leq \infty). \tag{2.1.8}$$

Следствие 2.1.1. *Соотношение (2.1.8) показывает, что множество бесконечно дифференцируемых на* E^n *функций плотно в* $L_p(G)$, *если* $1 \leq p < \infty$.

Лемма 2.1.2. *Если G - открытое множество пространства $E^n \in L_p^{loc}(G),\ p \geq 1$, то*

$$\lim_{v\to 0} f_{v^\lambda}(x) = f(x)$$

почти для всех $x \in G$.

Обобщенные в смысле Соболева производные и их свойства.

Определение. *Пусть функции f и χ локально суммируемы на открытом множестве $G \subset E^n$. Если для любой бесконечно дифференцируемой финитной в G функции φ выполняется равенство*

$$\int\limits_G \chi(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|k|}\int\limits_G f(x)\varphi^{(k)}(x)dx, \tag{2.2.1}$$

где $k = (k_1,\ \ldots,\ k_n)$, $k_i \geq 0$ - целые, то χ называется обобщенной производной функции f вида $f^{(k)} = D^k f = \frac{\partial^{|k|}f}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$ в G.

Лемма 2.2.1. *Пусть в области G заданы функция $f \in L_p^{loc}(G)$, последовательность функций $f_j \in L_p^{loc}(G)$, где $j = 1,\ \ldots,$ имеющих обобщенные производные $f_j^{(k)} \in L_q^{loc}(G)$ при $j = 1,\ \ldots,$ где $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Если $f_j \to f$ при $j \to \infty$ в смысле $L_p^{loc}(G)$ и $(f_j^{(k)} - f_i^{(k)}) \to 0$ при $j,\ i \to \infty$ в смысле $L_q^{loc}(G)$, то функция f имеет на G обобщенную производную $f^{(k)} \in L_q^{loc}(G)$ и $f_j^{(k)} \to f^{(k)}$ при $j \to \infty$ в смысле $L_q^{loc}(G)$.*

Интегральные представления дифференцируемых функций.

Для заданной локально суммируемой функции f мы строим ее среднюю функцию $f_{v^\lambda}(x) = f(x,\ v)$ с некоторым ядром Ω и параметром усреднения v^λ, где λ - фиксированный вектор. Усреднение можно рассматривать как функцию параметра v, непрерывно дифференцируемую по v при $v > 0$.

На основании формулы Ньютона - Лейбница при любых ε и $h,\ 0 < \varepsilon < h$, справедливо равенство

$$f_{\varepsilon^\lambda}(x) = f_{h^\lambda}(x) - \int\limits_\varepsilon^h \frac{\partial}{\partial v} f_{v^\lambda}(x)dv. \tag{2.3.1}$$

Области определения функций с различными условиями рога.

Определение. *Пусть* $l = (l_1, \ \ldots, \ l_n)$ *- вектор с положительными компонентами,* $0 < h \le \infty$, $\varepsilon > 0$, $a_i \neq 0$, *где* $i = 1, \ \ldots, \ n$. *Назовем* l*-рогом (радиуса* h *и раствором* ε*) множество*

$$V(l) = V(l, \ h) =$$
$$= \bigcup_{0<v<h} \left\{ x : \frac{x_i}{a_i} > 0, \ v < \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{l_i} < (1+\varepsilon)v \ (i = 1, \ \ldots, \ n) \right\}. \quad (2.4.1)$$

Определение. Открытое множество $G \in E^n$ удовлетворяет *слабому условию* l-рога ($G \in \underline{A}(l,h)$), если существует конечное число K открытых множеств G_k и l-рогов $V_k(l) = V_k(l,h)$, так что справедливо выражение

$$G = \bigcup_{k=1}^{K} G_k = \bigcup_{k=1}^{K} (G_k + V_k(l,h)) \quad (2.4.2)$$

Определение. Открытое множество G удовлетворяет *сильному условию* l-рога ($G \in \overline{A}(l,h)$), если для G выполнено условие (2.4.2) и

$$G = \bigcup_{k=1}^{K} G_k^{[\delta]} \quad \text{при некотором} \quad \delta > 0,$$

где

$$G_k^{[\delta]} = \left\{ x : x \in G_k, \rho(x, G \setminus G_k) > \delta \right\}.$$

Определение. Открытое множество G удовлетворяет условию l-рога ($G \in A(l,h)$), если для G выполнено условие (2.4.2) и

$$G = \bigcup_{k=1}^{K} G_k^{(\delta)} \quad \text{при некотором} \quad \delta > 0,$$

где

$$G_k^{(\delta)} = \left\{ x : x \in G_k, \rho(x, \partial G_k \setminus \partial G) > \delta \right\}.$$

Также делая упор на данные определения, введём такие классы:

$$\underline{A}(l) = \bigcup_{0<h<\infty} \underline{A}(l,h), \quad \overline{A}(l) = \bigcup_{0<h<\infty} \overline{A}(l,h), \quad A(l) = \bigcup_{0<h<\infty} A(l,h).$$

3. Анизотропные пространства Соболева и их свойства.

Анизотропные пространства дифференцируемых функций в связи с теоремами вложения впервые стал изучать С.М. Никольский, показав, что они образуют замкнутую систему относительно теорем вложения и получив обращение тех из них, которые касались перехода к многообразиям меньших размерностей без изменения метрики p.

Изучение с этой же точки зрения анизотропных функциональных пространств $W_p^l,\ l = (l_1,\ \ldots,\ l_n)$, обобщающих пространства Соболева, было начато Л.Н. Слободецким и развивалось в работах других авторов.

Определение. *Для функции $f \in E$, определенной на множестве $G \subset E^n,\ mes\,G > 0$, сужением f на $C^* \subset G$ называется функция $f^* = f|_{G^*}$, определенная на G^* равенством $f^*(x) = f(x)\ \forall x \in G^*$.*

Определение. *Пусть E и F - два нормированных функциональных пространства. Будем говорить, что E вложено в F, и писать $E \hookrightarrow F$, если, во-первых, все элементы E или их сужения на область определения элементов F содержатся в F и, во-вторых, существует не зависящая от f постоянная C такая, что*

$$||f||_F \le C||f||_E,\ \forall f \in E.$$

Теорема. Пространство $W_p^l(G),\ 1 \le p \le \infty$, является полным нормированным пространством, т. е. пространством Банаха.

Теорема. Пространство $W_p^l(G),\ 1 \le p \le \infty$ сепарабельно.

4. Вложения пространства Соболева при несоответствии l типу области.

Целью является получение теоремы вложения для пространства $W_p^l(G)$ в предположении, что открытое множество G удовлетворяет слабому условию s-рога, где $s \ne l,\ s = (s_1,\ \ldots,\ s_n)$. При несовпадении параметра s класса

$\underline{A}(s,\ H)$ областей G определения функции с дифференциальным параметром l класса рассматриваемых на G функций будут иметь место другие результаты, которые отличаются от случая $G = E^n$.

Теорема4.1.1. *Пусть открытое множество G удовлетворяет слабому условию l-рога, $1 \le p \le q \le \infty$, $\chi = \left|\left(\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) : l\right| \le 1$ и при $\chi = 1$ либо $1 < p = q < \infty$, либо $\chi = 1$ либо $1 < p_n < q_n < \infty$, либо $\chi = 1$ либо $1 = p_n < q_n = \infty$.*
Тогда $D^\alpha W_p^l(G) \hookrightarrow L_q$; точнее говоря, для $f \in W_p^l(G)$ существует на G обобщенная производная $D^\alpha f \in L_q(G)$ и существуют числа $h_0 > 0,\ C > 0$ такие, что

$$||D^\alpha f||_{q,\,G} \le Ch^{1-\chi} \sum_{i=1}^{n} \left|\left|D_i^{l_i} f\right|\right|_{p,\,G} + Ch^{-\chi}||f||_{p,\,G},$$

где постоянная C не зависит от f и $h \in (0,\ h_0)$. В частности, при $\alpha = 0$ $W_p^l(G) \hookrightarrow L_q(G)$.

Теорема 4.1.2. *Пусть $f \in W_p^l(G),\ G \in \underline{A}(s,\ H),\ 1 \le p \le q \le \infty$, $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ - вектор с целочисленными неотрицательными компонентами,*

$$\delta_i = \frac{l_i}{s_i} - \left(\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q},\ \frac{1}{s}\right)\ (i = 1,\ \ldots,\ n),\ \delta = \min_i \delta_i \ge 0 \qquad (4.1.1)$$

и при $\delta = 0$ либо $1 < p_n < q_n < \infty$, либо $1 = p_n < q_n = \infty$, либо $1 < p_n = q_n < \infty$.
Тогда $D^\alpha W_p^l(G) \hookrightarrow L_q(G)$, точнее говоря, для $f \in W_p^l(G)$ на G существует обобщенная производная $D^\alpha f \in L_q(G)$ и

$$||D^\alpha f||_{q,\,G} \le C\left(h^{-\delta_0}||f||_{p,\,G} + \sum_{i=1}^{n} h^{\delta_i}||D_i^{l_i} f||_{p,\,G}\right), \qquad (4.1.2)$$

где $\delta_0 = \left(\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q},\ \frac{1}{s}\right)$, h - произвольное число из $(0,\ H]$, а C - константа, не зависящая от f и h.

5. Сравнение результатов для пространств $W_p^{(l)}$ и W_p^{l1}.

В этом пункте будем считать l не вектором, как считали ранее, а целым положительным числом.

Целью этого пункта является сравнение результатов типа теоремы, доказанной в предыдущем пункте, для класса функций, обладающих всеми несмешанными производными порядка l, т. е. производными вида $D_i^l f$ $(i = 1,\ \ldots,\ n)$, с соответствующими результатами для класса функций, обладающих всевозможными производными порядка l.

Теорема.

Пусть $f \in W_p^{(l)}(G),\ G \in \underline{A}(s,\ H),\ 1 \le p \le q \le \infty,\ \alpha =$
$= (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n),\ \alpha_i \ge 0$ - целые $(i = 1,\ \ldots,\ n)$,

$$\overline{\delta} = \frac{l - |\alpha|}{\max\limits_{i=1,\ \ldots,\ n} s_i} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q},\ \frac{1}{s}\right) \ge 0,$$

причем при $\overline{\delta} = 0$ и $|\alpha| < l$ мы предполагаем, что $1 < p_n < q_n < \infty$.

Тогда $D^\alpha W_p^{(l)}(G) \hookrightarrow L_q(G)$, точнее говоря, на G существует $D^\alpha f \in L_q(G)$ и

$$||D^\alpha f||_{q,\,G} \le C \left(h^{-\delta_0} ||f||_{p,\,G} + h^{\delta} \sum_{|\beta| = l} ||D^\beta f||_{p,\,G} \right),$$

где $\delta_0 = \left(\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q},\ \frac{1}{s}\right)$, $h \in (0,\ H]$, C - константа, не зависящая от f и h.

Заключение. Нами были рассмотрены пространства L_p, основные интегральные неравенства, на которые на которые мы ссылались на протяжении всей работы. Были введены основные понятия, посвященные обобщенным производным в смысле Соболева, и рассмотрели их свойства. Также рассмотрели интегральные представления дифференцируемых функций. Введем понятие l-рога и рассмотрим области определения функций с различными условиями l-рога. Рассмотрели анизотропные пространства Соболева и их свойства, которые обозначили как теоремы и доказали их. Основываясь на утверждения, теоремы и некоторые определения первых трех глав доказали одну из основных теорем: "Вложения пространства W_p^l при несоответствии l типу области". Сравнили результаты для пространств $W_p^{(l)}$ и W_p^{l1}.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.

2. Ильин В. П. Интегральные представления дифференцируемых функций и их применение к вопросам продолжения функций классов $W_p^{(l)}(G)$.

3. Aronszajn N. On coercive integro-differential quadric forms // Conference on Partial Differential Equations, Univ. of Kansas, 1954. Report №?14. — P. 94?106.

4. Бесов О. В. О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. 1959. — Т. 126. — С. 1163?1165.

5. Бесов О. В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова.- 1961. Т. 60. — С. 42?81.

6. Джафаров А. С. Теоремы вложения для обобщенных классов С. М. Никольского.

7. Михайлов В. П., Гущин А. К. Лекционные курсы НОЦ, Дополнительные главы курса “Уравнения математической физики”.

8. Ильин В. П. Некотрые интегральные неравенства и их применение к теоремам вложения.

9. Буренков В. И. О приближении функций из пространства Соболева финитными функциями в случае произвольного открытого множества.

10. Соболев С. Л. Некотрые применения функционального анализа в математической физике.

11. Ильин В. П. Интегральные представления функций классов $L_p^l(G)$ и теоремы вложения.

12. Frend G., Kralik D. Uber die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips fur den Kreis // Acta Math. Hung. 1956. — Vol. 7, №?3?4. — P. 411?418.

13. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука, 1969. с. 480.

14. Бабич В. М., Слободецкий Jl. Н. Об ограниченности интеграла Дирихле // Докл. АН СССР. — 195G. — Т. 106. — №?4. — С. 604?607.

15. Gagliardo E. Caratterizzazione delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // Rend. Semin. Mat. Univ. di Padova. — 1957. — Vol. 27.- P. 284?305.

16. Слободецкий JI. Н. Обобщенные пространства С. JI. Соболева и их приложения к краевым задачам в частных производных // Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена. 1958. — Т. 197. — С. 54?112.

17. Prodi G. Tracce Sulla frontiera della funzioni di Beppo Levi // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1956. — V. 26. — P. 36?60.

18. Prodi G. Tracce di funzioni con derivate di ordine 1 a quadrato integrabile Su varieta di dimensione arbitraria // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1958. — V. 28. — P. 402?452.

19. Лизоркин П. И. Граничные свойства функций из весовых классов // Докл. АН СССР. 1960. — Т. 132, №?3. — С. 514?517.

20. Лизоркин П. И. Характеристика граничных значений функций на гиперповерхностях // Докл. АН СССР. 1963. — Т. 150, №?5, — С. 984?986.

21. Мазья В. Г. Пространства Соболева. Л. : Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1985. с. 416.

22. Решетняк Ю. Г. Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 2. с. 420–432.

23. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полна Г. Неравенства. М. : Изд-во иностр. лит., 1948. с. 256.

24. Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М. : Наука, 1983. С. 284.

25. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. с. 256.