

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра           математического анализа            
наименование кафедры

**Анизотропные пространства Соболева и теоремы вложения**

название темы выпускной квалификационной работы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки           4           курса           422           группы

направления           02.03.01 математика и компьютерные науки            
код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

**Поповой Марии Михайловны**

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

          доцент, к.ф.-м.н.          

должность, уч. степень, уч. звание

Зав. кафедрой

          профессор, д.ф.-м.н.          

должность, уч. степень, уч. звание

          Сахно Л. В.          

инициалы, фамилия

          Прохоров Д.В.          

инициалы, фамилия

Саратов 2017

**Введение.** Теория вложения пространств дифференцируемых функций многих действительных переменных сложилась как новое направление математики в 30-е годы в результате работ С. Л. Соболева. Данная теория направлена на изучение важных связей и соотношений дифференциальных свойств функций в различных метриках, имеет также множество существенных применений в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Целями данной работы являются рассмотрение основных понятий об анизотропных пространствах С. Л. Соболева и рассмотрение вывода теорем вложения. А также наглядное представление соответствия области условию  $l$ -рога, которое представим с помощью кода, написанного в программе Wolfram Mathematica.

В первой главе введём в рассмотрение пространства  $L_p$ , а также основные интегральные неравенства, с которыми будем работать. Также приведём некоторые важные утверждения в виде лемм и теорем, на которые в дальнейшем будем ссылаться. Вторая глава посвящена обобщённым производным по С. Л. Соболеву. В ней будут сформулированы основные понятия, касающиеся производной в смысле С. Л. Соболева и её свойства. В третьей главе получим интегральное представление дифференцируемых функций через производные, а также введём понятие об области определения функций с условиями  $l$ -рога. В четвёртой главе подробно рассмотрим значение сильного(слабого) условий  $l$ -рога и приведём примеры. Основываясь на введённых в первых четырёх главах понятиях и утверждениях, изложим в пятой главе основную теорию об анизотропных пространствах С. Л. Соболева  $W_p^l$ . Наконец, шестая глава является итогом выше изложенной теории, в ней представлен вывод двух теорем вложения: вложение пространства  $W_p^l(G)$  в пространство  $L_q(G)$  и вложение пространства  $W_p^l(G)$  в пространство  $C(G)$ .

**Основное содержание работы.** Сформулируем основные свойства пространств  $L_p(G)$  вещественных функций  $f(x)$ , определённых на измеримом, не обязательно ограниченном множестве  $G \subset E^n$ , где  $E^n$  –  $n$ -мерное евклидово пространство точек  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Измеримость этих множеств понимается в смысле Лебега.

**Определение 1.1.** Пусть  $p$  – вещественное число,  $1 \leq p < \infty$ . Обозначим через  $L_p(G)$  – пространство измеримых на  $G$  функций  $f(x)$ , для которых функция  $|f(x)|^p$  интегрируема в смысле Лебега на  $G$ .

Число

$$\|f\|_{L_p(G)} = \|f\|_{p,G} = \left( \int_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

называется нормой элемента  $f \in L_p(G)$ .

**Теорема 1.1.** Пространство  $L_p(G)$  является полным, то есть если  $f_k \in L_p(G)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ),  $\|f_k - f_l\|_{p,G} \rightarrow 0$  ( $k, l \rightarrow \infty$ ), то существует функция  $f \in L_p(G)$  такая, что  $\|f_k - f\|_{p,G} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

**Определение 1.5.** Функция  $f \in L_p(G)$  называется *непрерывной (в целом)* в  $L_p(G)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta > 0$  такое, что

$$\|f(\cdot + y) - f\|_{p,E^n} < \varepsilon,$$

как только  $|y| < \delta$ , где  $|y| = \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$ .

**Теорема 1.2.** Всякая функция  $f \in L_p(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , непрерывна в целом в  $L_p(G)$ .

**Определение 1.8.** Множество  $S$  пространства  $L_p(G)$  называется *плотным* в  $L_p(G)$ , если для каждого  $f \in L_p(G)$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется элемент  $\varphi_\varepsilon \in S$  такой, что

$$\|\varphi_\varepsilon - f\|_{p,G} < \varepsilon.$$

**Теорема 1.3.** Если  $1 \leq p < \infty$ , то множество  $C_0^\infty(G)$  плотно в  $L_p(G)$ , следовательно, для каждой функции  $f \in L_p(G)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) существует последовательность функций  $\varphi_k \in C_0^\infty(G)$ , такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k - f\|_{p,G} = 0.$$

**Определение 1.10.** Пусть  $G$  – открытое множество в  $E^n$ . Если функция  $f(x)$ , заданная на  $G$ ,  $f \in L_p(F)$  на любом компакте  $F \subset G$ , то будем говорить, что  $f(x)$  принадлежит классу  $L_p^{\text{loc}}(G)$ . Если  $p = 1 = (1, \dots, 1)$ , то будем обозначать такой класс  $L^{\text{loc}}(G)$ .

Приведем основные интегральные неравенства.

**1. Неравенство Гёльдера для векторных  $p = (p_1, \dots, p_n)$**

$$\int_{E^n} |f_1(x) f_2(x)| dx \leq \|f_1\|_p \|f_2\|_{p'},$$

где  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

**2. Неравенство Минковского для векторных  $p = (p_1, \dots, p_n)$**

$$\left\| \sum_{i=1}^m f_i \right\|_p \leq \sum_{i=1}^m \|f_i\|_p,$$

где  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f_i \in L_p(E^n)$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

**Обобщенное неравенство Минковского для векторного  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$**

Пусть  $\varphi(x, y)$  – измеримая функция, заданная на  $E_x \times E_y$ , то справедливо неравенство

$$\left\| \int_{E_y} \varphi(\cdot, y) dy \right\|_{p, E_x} \leq \int_{E_y} \|\varphi(\cdot, y)\|_{p, E_x} dy. \quad (1.2)$$

**3. Неравенство Юнга для векторного  $p$ .** Пусть  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $q = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $r = (r_1, \dots, r_n)$ ,

$$1 \leq p \leq q \leq \infty, \quad 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r},$$

$$J(x) = \int_{E^n} f(y) K(y - x) dy.$$

Тогда

$$\|J\|_q \leq \|K\|_r \|f\|_p \quad (1.5)$$

Далее рассмотрим процесс приближения функций средними, приведём понятие и сформулируем некоторые свойства обобщённой производной по С. Л. Соболеву.

Будем рассматривать функцию  $K(x)$  – бесконечно дифференцируемую, финитную в  $E^n$  ( $K \in C_0^\infty$ ), которая удовлетворяет условию

$$\int_{E^n} K(x) dx = 1.$$

Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $v > 0$

Построим для  $K(x)$  среднюю функцию, которая будет бесконечно дифференцируемой на  $E^n$ , следующим образом:

$$K_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|} K(x : v^\lambda).$$

Носителем этой функции является множество

$$S_{v^\lambda}(K) = \{x : (x : v^\lambda) \in S(K)\}, \quad S_{v^\lambda}(K) \subset I_{v^\lambda}.$$

Пусть  $G$  – измеримое множество пространства  $E^n$ ,  $f$  – функция, определенная на  $G$ . Положим  $f = 0$  на  $E^n \setminus G$  и предположим, что  $f \in L^{\text{loc}}(E^n)$ .

Определим для нее среднюю функцию с ядром усреднения  $K$  и параметром  $v^\lambda$  усреднения по формуле

$$f_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|} \int_{E^n} f(x+y) K(y : v^\lambda) dy = v^{-|\lambda|} \int_{E^n} f(y) (K((y-x) : v^\lambda)) dy.$$

Эта функция непрерывна, имеет непрерывные производные любого порядка на  $E^n$  и для любого  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ( $\alpha_i \geq 0$  – целые)

$$D_x^\alpha f_{v^\lambda}(x) = (-1)^{|\alpha|} v^{-|\lambda| - (\alpha, \lambda)} \int_{E^n} f(y) D^\alpha K((y-x) : v^\lambda) dy,$$

где  $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}$ ,  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ .

Приведём далее важные утверждения в виде лемм.

**Лемма 2.1** Если  $f \in L_p(G)$  ( $p = (p_1, \dots, p_n)$ ), то

$$\|f_{v^\lambda}\|_p \leq \|K\|_1 \|f\|_p \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \|f_{v^\lambda} - f\|_p = 0, \quad (1 \leq p < \infty).$$

**Замечание 2.1.** Если  $f \in L_p^{\text{loc}}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , то  $f_{v^\lambda} \rightarrow f$  в смысле  $L_p^{\text{loc}}(G)$ .

**Лемма 2.2.** Если  $G$  – открытое множество пространства  $E^n$ ,  $f \in L_p^{\text{loc}}(G)$ ,  $p \geq 1$ , то

$$\lim_{v \rightarrow 0} f_{v^\lambda}(x) = f(x)$$

для почти всех  $x \in G$ .

**Замечание 2.2.** Если  $f$  непрерывна на  $G$ , то при  $v \rightarrow 0$   $f_{v^\lambda}(x) \rightarrow f(x)$  в каждой точке  $x \in G$ .

**Определение 2.1.** Пусть функции  $f$  и  $g$  локально суммируемы на открытом множестве  $G \subset E^n$ . Если для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции в  $G$  функции  $\varphi$  выполняется равенство

$$\int_G g(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|k|} \int_G f(x)\varphi^{(k)}(x)dx,$$

где  $k = (k_1, \dots, k_n)$  ( $k_i \geq 0$  – целые), то  $g$  называется *обобщённой производной* функции  $f$  вида  $f^{(k)} = D^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$  в  $G$ .

**Лемма 2.3.** Пусть в области  $G$  заданы функция  $f \in L_p^{\text{loc}}(G)$ , последовательность функций  $f_j \in L_p^{\text{loc}}(G)$  ( $j = 1, \dots$ ), имеющих обобщённые производные  $f_j^{(k)} \in L_q^{\text{loc}}(G)$  ( $j = 1, \dots$ ), где  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ .

Если  $f_j \rightarrow f$  ( $j \rightarrow \infty$ ) в смысле  $L_p^{\text{loc}}(G)$  и  $(f_j^{(k)} - f_i^{(k)}) \rightarrow 0$  ( $i, j \rightarrow \infty$ ) в смысле  $L_q^{\text{loc}}(G)$ , то функция  $f$  имеет на  $G$  обобщённую производную  $f^{(k)} \in L_q^{\text{loc}}(G)$  и  $f_j^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$  ( $j \rightarrow \infty$ ) в смысле  $L_q^{\text{loc}}(G)$ .

Приведём вывод интегральных представлений функций через производные. Данный вывод основан на следующей идее.

Пусть дана локально суммируемая функция  $f$ . Построим для неё среднюю функцию  $f_{v^\lambda} = f(x, v)$  с некоторым ядром  $K'$  и параметром усреднения  $v^\lambda$ , где  $\lambda$  – фиксированный вектор. Такую функцию можно рассматривать как функцию параметра  $v$ , непрерывно дифференцируемую по  $v$  при  $v > 0$ .

Полученное интегральное представление имеет вид:

$$f(x) = f_{h^\lambda}(x) + \int_0^h \sum_{i=1}^n v^{-1-|\lambda|+l_i\lambda_i} dv \int_{E^n} D_i^{l_i} f(x+y) \mathcal{L}_i(y : v^\lambda) dy, \quad (3.11)$$

справедливое для почти каждого  $x$  из того множества, для которого имеет смысл правая часть формулы (3.11).

Рассмотрим подробнее, каков смысл представления (3.11). Фактическое интегрирование правой части этой формулы проводится по точкам  $y \in S(K, \lambda, h)$ , где

$$S(K, \lambda, h) = \bigcup_{0 < v \leq h} S_{v^\lambda}(K)$$

– теоретико-множественная сумма множеств  $S_{v^\lambda}(K)$  вида

$$S_{v^\lambda}(K) = \{x : (x : v^\lambda) \in S(K)\}.$$

Это справедливо, так как  $\text{supp } \mathcal{L}_i \subset S(K)$ . Следовательно, в правой части (3.11) используются значения функции  $f$  и ее производных в точках множества  $x + S(K, \lambda, h)$ , которое назовём носителем представления (3.11).

Пусть  $G$  – область задания функции  $f$ . Положим

$$U = \{x : x \in G, x + S(K, \lambda, h) \subset G\}.$$

Тогда правая часть (3.11) имеет смысл для всех  $x$  из множества  $U$ . Так как предполагаем, что  $f \in L^{\text{loc}}(G)$ , то в силу леммы 2.2 в случае  $p = 1$ , можно утверждать, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $f_{\varepsilon^\lambda}(x) \rightarrow f(x)$  почти везде на  $G$ , а следовательно, почти везде на  $U$ . Это означает, что тождество (3.11), которое получили из (3.10) устремлением  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливо для почти всех точек  $x$  множества  $U$ .

Пусть  $b > 0$ ,  $a_i \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ),

$$S(K) \subset \left\{ x : \frac{x_i}{a_i} > 0, 1 < \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^{1/\lambda_i} < 1 + b \quad (i = 1, \dots, n) \right\}.$$

Тогда

$$S(K, \lambda, h) \equiv V\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \\ = \bigcup_{0 < v \leq h} \left\{ x : \frac{x_i}{a_i} > 0, 1 < \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{1/\lambda_i} < (1+b)v \quad (i = 1, \dots, n) \right\}$$

Область  $V\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  называется  $\frac{1}{\lambda}$ -рогом радиуса  $h$  и раствора  $b$ .

В случаях применения интегрального представления (3.11) считаем, что  $\lambda = \frac{1}{l}$  ( $\lambda_i = \frac{1}{l_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). В этом случае носителем данного представления будет *сдвинутый  $l$ -рог*  $x + V(l)$ . И в случае  $l_1 = \dots = l_n$   $l$ -рог  $V(l)$  является конусом.

**Определение 4.1.** Открытое множество  $G \in E^n$  удовлетворяет *слабому условию  $l$ -рога* ( $G \in \underline{A}(l, h)$ ), если существует конечное число  $K$  открытых множеств  $G_k$  и  $l$ -рогов  $V_k(l) = V_k(l, h)$ , так что справедливо выражение

$$G = \bigcup_{k=1}^K G_k = \bigcup_{k=1}^K (G_k + V_k(l, h)) \quad (4.1)$$

**Определение 4.2.** Открытое множество  $G$  удовлетворяет *сильному условию  $l$ -рога* ( $G \in \bar{A}(l, h)$ ), если для  $G$  выполнено условие (4.1) и

$$G = \bigcup_{k=1}^K G_k^{[\delta]} \quad \text{при некотором } \delta > 0,$$

где

$$G_k^{[\delta]} = \{x : x \in G_k, \rho(x, G \setminus G_k) > \delta\}.$$

**Определение 4.3.** Открытое множество  $G$  удовлетворяет *условию  $l$ -рога* ( $G \in A(l, h)$ ), если для  $G$  выполнено условие (4.1) и

$$G = \bigcup_{k=1}^K G_k^{(\delta)} \quad \text{при некотором } \delta > 0,$$

где

$$G_k^{(\delta)} = \{x : x \in G_k, \rho(x, \partial G_k \setminus \partial G) > \delta\}.$$



На основании приведённых определений, введём классы

$$\underline{A}(l) = \bigcup_{0 < h < \infty} \underline{A}(l, h), \quad \overline{A}(l) = \bigcup_{0 < h < \infty} \overline{A}(l, h), \quad A(l) = \bigcup_{0 < h < \infty} A(l, h).$$

**Определение 5.1.** Пусть  $G$  – открытое множество  $n$ -мерного евклидова пространства  $E^n$ ,  $l = (l_1, \dots, l_n)$  – вектор с натуральными компонентами  $1 \leq p \leq \infty$ . Обозначим через  $W_p^l(G)$  пространство локально суммируемых на  $G$  функций  $f$ , имеющих на  $G$  обобщённые производные  $D_i^{l_i} f(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и конечную норму

$$\|f\|_{W_p^l(G)} = \|f\|_{p,G} + \sum_{i=1}^n \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{p,G} = \|f\|_{p,G} + \|f\|_{L_p^l(G)}.$$

Здесь  $L_p^l(G)$  – множество, элементами которого являются классы элементов из  $W_p^l(G)$ , имеющих все одинаковые производные порядка  $l$ .

Сформулируем некоторые основные свойства пространства  $W_p^l(G)$  в виде теорем.

**Теорема 5.1.** Пространство  $W_p^l(G)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , является банаховым пространством (то есть полным нормированным).

**Теорема 5.2.** Пространство  $W_p^l(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$  сепарабельно.

**Лемма 6.1.** Пусть  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ,  $\varkappa \leq 1$  и при  $\varkappa = 1$  либо  $1 < p = q < \infty$ , либо  $1 < p_n < q_n < \infty$ , либо  $1 = p_n < q_n = \infty$ .

Тогда  $D^\alpha W_p^l(U + V) \hookrightarrow L_q(U)$  и для  $f \in W_p^l(U + V)$

$$\|D^\alpha f\|_{q,U} \leq C_1 h^{1-\varkappa} \sum_{i=1}^n \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{p,U+V} + C_2 h^{-\varkappa} \|f\|_{p,U+V}, \quad (6.1)$$

причём  $C_1$  и  $C_2$  не зависят от  $f$  и  $h$ , а  $C_2$  не зависит также от  $q$ . В левой части (6.1)  $D^\alpha f$  можно заменить на  $D^\alpha f_\varepsilon$  при любом  $\varepsilon \in (0, h]$ .

При  $\varkappa < 1$

$$C_1 = C'_1 \left( \frac{1}{1-\varkappa} \right)^{1-\frac{1}{p_n}+\frac{1}{q_n}} \left( \frac{1}{q_n} \right)^{\frac{1}{q_n}},$$

где  $C'_1$  не зависит от  $q$ .

**Теорема 6.1. Вложение пространства  $W_p^l(G)$  в пространство  $L_q(G)$**

Пусть открытое множество  $G$  удовлетворяет слабому условию  $l$ -рога,  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ,  $\varkappa = \left| \left( \alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) : l \right| \leq 1$  и при  $\varkappa = 1$  либо  $1 < p = q < \infty$ , либо  $1 < p_n < q_n < \infty$ , либо  $1 = p_n < q_n = \infty$ .

Тогда  $D^\alpha W_p^l(G) \hookrightarrow L_q$ ; точнее говоря, для  $f \in W_p^l(G)$  существует на  $G$  обобщённая производная  $D^\alpha f \in L_q(G)$  и существуют числа  $h_0 > 0$ ,  $C > 0$  такие, что

$$\|D^\alpha f\|_{q,G} \leq Ch^{1-\varkappa} \sum_{i=1}^n \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{p,G} + Ch^{-\varkappa} \|f\|_{p,G},$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $f$  и  $h \in (0, h_0)$ . В частности, при  $\alpha = 0$   $W_p^l(G) \hookrightarrow L_q(G)$ .

**Теорема 6.2. Вложение пространства  $W_p^l(G)$  в пространство  $C(G)$**

Пусть открытое множество  $G$  удовлетворяет слабому условию  $l$ -рога,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\varkappa = \left| \left( \alpha + \frac{1}{p} \right) : l \right| < 1$  либо  $\varkappa = 1$ ,  $p_n = 1$ .

Тогда  $D^\alpha W_p^l(G) \hookrightarrow C(G)$ , точнее говоря, для  $f \in W_p^l(G)$  производная  $D^\alpha f$  непрерывна в  $G$  и

$$\sup_G |D^\alpha f| \leq Ch^{1-\varkappa} \sum_{i=1}^n \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{p,G} + Ch^{-\varkappa} \|f\|_{p,G},$$

где  $0 < h < h_0$  и постоянная  $C$  не зависит от  $f$  и  $h$ .

**Заключение.** Нами были рассмотрены пространства  $L_p$ , основные интегральные неравенства, на которые ссылались на протяжении работы. Также сформулировали основные понятия, касающиеся производной в смысле С. Л. Соболева и её свойства. Рассмотрели вывод интегрального представления дифференцируемых функций через производные, а также привели понятие об областях определения функций с различными условиями  $l$ -рога. Основываясь на введённых ранее понятиях и утверждениях, изложили основную теорию об анизотропных пространствах С. Л. Соболева  $W_p^l$ . И в итоге привели две теоремы вложения: вложение пространства  $W_p^l(G)$  в пространство  $L_q(G)$  и вложение пространства  $W_p^l(G)$  в пространство  $C(G)$ . Также продемонстри-

ровали представление соответствия области условию  $l$ -рога с помощью кода, написанного в программе Wolfram Mathematica.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. : Наука, 1975. 480 с.
- 2 Бесов О. В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. МИАН СССР. 1961. Т. 60. С. 42–81.
- 3 Ильин В. П. Свойства некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных в  $n$ -мерной области // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1962. Т. 66. С. 227–363.
- 4 Ильин В. П. О теореме вложения для предельного показателя // ДАН СССР. 1954. Т. 96, № 5. С. 905–908.
- 5 Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука, 1969. с. 480.
- 6 Никольский С. М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.
- 7 Никольский С. М. Об одной задаче С. Л. Соболева // Сиб. матем. журн. Т. 3, № 6. 1962, С. 845–851.
- 8 Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа // Мат. сб. Т. 4. № 46. 1938. С. 471–497.
- 9 Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. с. 256.
- 10 Галахов М. А. О суммируемых областях // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 89. 69 с.
- 11 Кондрашов В. И. О некоторых свойствах функций из пространств  $L_p^\nu$  // ДАН СССР. 1945. Т. 48.

- 12 Слободецкий Л. Н. Пространства С. Л. Соболева дробного порядка и их приложения к краевым задачам для дифференциального уравнения в частных производных // ДАН СССР. 1958. Т. 118, № 2. С. 243–246.
- 13 Джафаров А. С. Теоремы вложения для обобщенных классов С. М. Никольского // Учен. записки Азерб. ун-та, сер. физ.-матем. наук. 1963. № 2. С. 45–49.
- 14 Гудиев А. Х. Теорема вложения для следа в абстрактных функциях // ДАН СССР. 1962. Т. 147 № 4. С. 764–767.
- 15 Aronszajn N. On coercive integro-differential quadric forms, Conference on Partial Differential Equations, Univ. of Kansas. 1954, Report № 14. P. 94–106.
- 16 Бабич В. М., Слободецкий Л. Н. Об ограниченности интеграла Дирихле // ДАН СССР. 1956. Т. 106, № 4, С. 604–607.
- 17 Freud G., Kralik D. Uber die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips fur Math. Hung. 1956. V. 7, № 3–4. P. 411–418.
- 18 Gagliardo E. Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in  $n$  variabili, Rend. Sem. Matem. univ. di Padova. 1957. V. 27.
- 19 Лизоркин П. И. Обобщённые гёльдеровы пространства  $B_{\rho,\theta}^{(r)}$  и их соотношения с пространствами Соболева  $L_p^{(r)}$  // Сиб. матем. журн. Т. 9, № 5. 1968, С. 1127–1152.
- 20 Успенский С. В. Теорема о вложении классов С. Л. Соболева  $W_p^r$  дробного порядка // ДАН СССР. 1960. Т. 130, № 5. С. 992–993.
- 21 Головкин К. К. К теоремам вложения // ДАН СССР. 1960. Т. 134, № 1. С. 19–22.
- 22 Головкин К. К., Солонников В. А. Теоремы вложения для дробных пространств // ДАН СССР. 1962. Т. 143, № 4.

- 23 Солонников В. А. Об оценках в  $L_p$  решений эллиптических и параболических систем // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 102. С. 137–160.
- 24 Буренков В. И. Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве, в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1965, М. : ВИНТИ АН СССР. 1966. С. 71–155.
- 25 Jessen B., Marcinkewicz J., Zygmund A. Note on the differentiability of multiple integrals // Fundamenta Math. 1935. V. 25. P. 217–234.