Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

наименование кафедры

Интегралы от однолистных функций

название темы выпускной квалификационной работы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 422 группы

направления 02.03.01 математика и компьютерные науки

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Серовой Марии Владимировны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н. Разумовская Е.В.

должность, уч. степень, уч. звание — подпись, дата — инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

профессор, д.ф.-м.н. Прохоров Д.В.

должность, уч. степень, уч. звание — подпись, дата — инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. Достаточные условия однолистности регулярных функций появились сначала при исследовании необходимых условий однолистности. Объясняется это тем, что в подклассах однолистных функций, выделяемых некоторыми достаточными признаками, сравнительно легко разрешимы задачи, трудные для всего класса однолистных функций. Так, например, проблема коэффициентов для регулярных однолистных в круге $E = \{z : \ |z| < 1\}$ функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + ...$$

полностью решена в подклассах выпуклых и звездообразных функций, а в общем случае решение еще не получено, хотя и имеются результаты, близкие к окончательным.

После условий выпуклости и звездообразности, выведенных в начале XX века, были найдены условия спиралеобразности (Шпачек), условие с ограничением на аргумент производной (Вольф, Носиро, Варшавский) и различные условия по поведению коэффициентов ряда Тейлора (Одзаки). Эти условия были получены в 30-е годы.

Интерес к достаточным условиям однолистности, как к самостоятельному направлению в геометрической теории функций, наметился в 50-е годы. Такое положение было вызвано потребностью в достаточных признаках при исследовании однолистности различных функций, их усреднений, структурных формул, интегралов Коши и Шварца, решений краевых задач, в особенности прикладных обратных краевых задач. С этого времени широким становится «спектр» методов: Нехари и В.В. Покорный связали однолистность с неколеблемостью решений дифференциальных уравнений, Каплан и Умедзава использовали топологические методы и римановы поверхности, Б.Н. Рахманов применил метод семейств линий, И.Е. Базилевич показал возможности уравнений Левнера — Куфарева для получения новых классов однолистных функций, В.А. Зморович, В.С. Рогожин, Л.А. Аксентьев использовали теорему

Вейерштрасса о среднем и исследовали применимость элементарных методов, в частности, для функций, непрерывных в замкнутых областях.

На сегодняшний день широко развивается направление в геометрической теории функций комплексного переменного, связанное с достаточными условиями однолистности аналитических функций. По методам исследований и по богатству приложений эта область геометрической теории функций является весьма перспективной.

Актуальность работы определяется тем, что в настоящее время центральное место в исследованиях различных семейств функций, регулярных в заданных областях занимает получение всевозможных необходимых и достаточных условий однолистности функций и изучение влияния свойств однолистности на другие свойства функции.

Цель работы - выяснить, при каких условиях функция (семейство функций) будет однолистна в рассматриваемом классе $K(m,\gamma)$ и подклассе S класса A.

Для достижения цели необходимо решить следующие **задачи**:

1) определить класс функций $K(m,\gamma)$, регулярных в единичном круге D и удовлетворяющих в нем условиям однолистности;

2) исследовать ряд функций на принадлежность классу $K(m,\gamma)$;

3) определить класс функций A, аналитических и однолистных в открытом единичном круге;

4) исследовать ряд функций на принадлежность подклассу S класса A.

Работа состоит из введения; основной части, которая в свою очередь состоит из 4 разделов; заключения; списка использованных литературных источников, состоящего из 29 наименований.

В первом разделе работы вводится понятие класса $K(m,\gamma)$ и рассматривается пример построения интегрального представления функции данного класса.

Во втором и третьем разделах вводится понятия класса A и подкласса S, и устанавливается принадлежность интегрального оператора(семейства интегральных операторов) подклассу S класса A.

В четвертом разделе рассматриваются дополнительные примеры построения функций в ранее определенных классах.

Основное содержание работы. Пусть $K(m, \gamma),\ \operatorname{Re} m > 0,\ 0 \leq \gamma \leq 1$,- класс функций $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$, регулярных в круге $D = \{z : |z| < 1\}$, и удовлетворяющих в нем условиям

$$\frac{f(z)}{z} f^{'}(z) \neq 0, \tag{1.1}$$

$$\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf^{''}(z)}{f^{'}(z)} + (m-1)\frac{zf^{'}(z)}{f(z)}\right] d\theta > -\gamma\pi, \tag{1.2}$$

$$z = re^{i\theta}, \quad 0 < r < 1, \quad \theta_1 < \theta_2$$

Наряду с функцией $f(z) \in K(m, \gamma)$ рассмотрим функцию

$$g_{a,m} = [m(a+1)z^{-am} \int\limits_0^z t^{a^m - 1} f^m(t) dt]^{-1/m}, \quad a \geq 0, \tag{1.3}$$

где под $g_{a,m}(z)$ понимается та ветвь, которая имеет разложение

$$g_{a,m} = z + b_2 z^2 + ..., |z| < 1.$$

Установим принадлежность функции $g_{a,m}$ классу $K(m, \gamma)$.

Теорема 1.1 *Пусть* $f(z) \in K(m, \gamma)$, $\operatorname{Re} m > 0, 0 \leq \gamma \leq 1$. *Тогда при любом* $a \geq 0$ *функция* $g_{a,m}(z) \in K(m, \gamma)$.

Подобную теорему можно доказать и для класса функций, который исследовался, в частности Ю.Д. Максимовым [21],[22].

Пусть $S(\gamma)$, $0 \leq \gamma \leq 1$, - класс функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, регулярных в D и удовлетворяющих в нем условиям:

$$\frac{f(z)}{z} \neq 0; \tag{1.17}$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{Re}\,(zf'(z)/f(z))d\theta > -\gamma\pi,$$

$$z = re^{i\theta}, \quad 0 < r < 1, \quad \theta_1 < \theta_2. \tag{1.18}$$

Аналогично, установим принадлежность функции $g_{a,1}(z)$ классу $S(\gamma)$.

Теорема 1.2 *Пусть* $f(z) \in S(\gamma), \quad 0 \le \gamma \le 1$. *Тогда при любом* $a \ge 0$ *функция* $g_{a,1}(z) \in S(\gamma)$.

Перейдем ко второй части представленной работы.

Обозначим через A - класс функций вида

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k,$$

которые являются аналитическими в открытом единичном круге

$$U = \{z : z \in C, |z| < 1\}$$

и удовлетворяют следующему условию нормировки:

$$f(0) = f'(0) - 1 = 0,$$

где C- множество комплексных чисел. Обозначим через S подкласс класса A, состоящий из функций, которые однолистны в U.

Определим два интегральных оператора:

$$F_n(f,g)(z) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\gamma_i} \int_0^z t^{-1} \prod_{i=1}^{n} (f_i(t)e^{g_i(t)})^{\frac{1}{\gamma_i}} dt \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i}} \tag{2.1}$$

$$G_n(f,g)(z) = \left(\beta \int_0^z t^{\beta-1} \prod_{i=1}^{n} \left(f_i'(t)e^{g_i(t)} \right)^{\alpha_i} dt \right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{2.2}$$

Выведем для каждого из интегральных операторов достаточные условия однолистности, предварительно сформулировав теорему, которая была представлена в работе N.Pascu в [26].

Теорема 2.1. Достаточное условие однолистности. Пусть β - комплексное число, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$ $f \in A$. Если

$$\frac{1-|z|^{2\operatorname{Re}\beta}}{\operatorname{Re}\beta}\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le 1, \quad z \in U.$$

Тогда интегральный оператор

$$F_\beta(z) = \left(\beta\int_0^z t^{\beta-1}f'(t)dt\right)^{\frac{1}{\beta}} \in S.$$

Теорема 2.2. Достаточное условие однолистности для интеграла $\mathbf{F_n(f,g)(z)}$. Пусть γ_i - комплексное число, $\gamma_i \neq 0, \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\gamma_i}$ и M_i, N_i - вещественные положительные числа для $\forall i \in 1, 2...n$. Кроме того, пусть функции $f_i, g_i \in A$ удовлетворяют условиям

$$\left|\frac{zf_i'(z)}{f_i} - 1\right| \le M_i, \quad |g_i| \le N_i, \quad z \in U, \tag{2.3}$$

для $\forall i \in 1, 2...n$. Если

$$\left|\frac{zg_i'(z)}{g_i}\right| \le 1, \quad z \in U, \tag{2.4}$$

и

$$\operatorname{Re}\beta \ge \sum_{i=1}^{n}\frac{M_i + N_i}{|\gamma_i|} \tag{2.5}$$

для $\forall i \in 1, 2...n$. Тогда интегральный оператор $F_n(f,g)(z) \in S$.

Теорема 2.3 Достаточное условие однолистности для интеграла $\mathbf{G_n(f,g)(z)}$. Пусть α_i, β - комплексные числа, $\operatorname{Re}\beta > 0$ и M_i, N_i - вещественные положительные числа и $\forall i \in 1, 2...n$.

Кроме того, пусть функции $f_i(z), g_i(z) \in A$ удовлетворяют условиям

$$\left|\frac{zf_i''(z)}{f_i'(z)}\right| \le M_i, \quad z \in U, \quad |g_i| \le N_i \in U, \tag{2.7}$$

для $\forall i \in 1, 2...n$.

Если

$$\left|\frac{zg_i'(z)}{g_i(z)} - 1\right| \le 1, \quad z \in U, \tag{2.8}$$

и

$$\operatorname{Re}\beta \ge \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|(M_i + 2N_i) \tag{2.9}$$

для $\forall i \in 1, 2...n$. Тогда интегральный оператор $G_n(f,g)(z) \in S$.

В третьей части работы обобщим условия однолистности для семейства интегральных операторов.

Введем три семейства интегральных операторов, которые были представлены N. Breaz и D. Breaz в работах [27], [28], [29].

$$F_{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n,\beta}(z) = \left(\beta \int_0^z t^{\beta-1} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i(z)}{z}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}} dz\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad (3.1),$$

$$G_{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n}(z) = \left(\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1) + 1\right) \int_0^z \prod_{i=1}^{n}(f_i(z))^{\alpha_i - 1} dz\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-1)+1)}} \qquad (3.2),$$

$$H_{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n,\beta}(z) = \left(\beta \int_0^z t^{\beta-1} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i(z)}{z}\right)^{\alpha_i} dz\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad (3.3),$$

Исследуем условия однолистности для каждого из них.

Теорема 3.1 Достаточное условие однолистности для семейства интегралов $\mathbf{F}_{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n,\beta}(\mathbf{z})$. Пусть функции $f_i \in A(i \in 1...n)$ и α_i, β_i-комплексные числа с $\operatorname{Re}\beta > 0$ для $\forall i = 1...n$. Если

$$(a) \qquad 4\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_i|} \leq \operatorname{Re}\beta, \quad \operatorname{Re}\beta \in (0,1)$$

или

$$(b) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_i|} \leq \frac{1}{4}, \quad \operatorname{Re}\beta \in [1,\infty),$$

то функция $F_{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n,\beta}(z) \in S$.

Теорема 3.2 Достаточное условие однолистности для семейства интегралов $\mathbf{G}_{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n}(\mathbf{z})$. Пусть функции $f_i \in A(i \in 1...n)$ и α_i, β_i-комплексные числа и для $\forall i = 1...n$, $\beta = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i - 1) + 1\right)$ и $\operatorname{Re}\beta \geq 0$. Если

$$(a) \qquad 4\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - 1| \leq \operatorname{Re}\beta, \quad \operatorname{Re}\beta \in (0,1)$$

или

$$(b) \qquad \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - 1| \leq \frac{1}{4}, \operatorname{Re}\beta \in [1,\infty),$$

то функция $G_{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n}(z) \in S$.

Теорема 3.3 Достаточное условие однолистности для семейства интегралов $\mathbf{H}_{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n,\beta}(\mathbf{z})$. Пусть функции $f_i \in A(i \in 1...n)$ и α_i, β-комплексные числа с $Re\beta > 0$ для $\forall i = 1...n$. Если

$$(a) \qquad 4\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \leq \operatorname{Re}\beta, \quad \operatorname{Re}\beta \in (0,1)$$

или

$$(b) \qquad \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \leq \frac{1}{4}, \quad \operatorname{Re}\beta \in [1,\infty),$$

то функция $H_{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n,\beta}(z) \in S$.

В четвертой части работы представлены дополнительные примеры построения функций в ранее определенных классах.

Теорема 4.1 Пусть функция $f(z) \in K(m,\gamma)$, $\operatorname{Re} m > 0, 0 \leq \gamma \leq 1$, причем выполняется условие

$$\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} z \left[\frac{(m+1)f'(z)g'(z)}{f'(z)+f(z)g'(z)} + \frac{f(z)(g''(z)+g'^2(z))}{f'(z)+f(z)g'(z)} - \right.$$

$$\left. - \frac{f''(z)f(z)g'(z)}{(f'(z)+f(z)g'(z))f'(z)}\right] d\theta > 0, \tag{4.1}$$

Тогда функция $\varphi(z) = f(z)e^{g(z)} \in K(m,\gamma)$.

Теорема 4.2 Пусть a^m - комплексное число, $a^m \neq 0$, M_i - вещественное положительно число для $\forall i = 1, 2...n$. Кроме того, пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\left| \frac{zm}{f(z)} - 1 \right| \leq M_i, \tag{4.2}$$

для $\forall i = 1, 2...n$. Если

$$\operatorname{Re} a^m \geq \frac{M_i}{a^m}, \tag{4.3}$$

для $\forall i = 1, 2...n$. Тогда интегральный оператор

$$J(z) = \left(a^m \int\limits_0^z t^{a^m - 1} \varphi'(t) dt \right)^{\frac{1}{a^m}} \in S.$$

Заключение. Подводя итоги данного исследования, можно сказать о том, что поставленные цели и задачи были выполнены, т.е. были определены классы $K(m, \gamma)$ и A, получены условия, при которых различные функции будут однолистны в данных классах, а также, самостоятельно построены дополнительные примеры функций и установлена их принадлежность ранее определенным классам.

В заключении хочется отметить, что тема исследования достаточных условий однолистных функций актуальна и крайне важна, так как теория однолистных функций занимает центральное место в геометрической теории функций комплексной переменной и является основополагающей в теории конформных отображений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Study, E. Vorlesungen tiber ausgewalte Gegenstande der Geometrie, Zweiter Heft, konforme Abbildung einfachzusammenhangender Bereiche: Leipzig und Berlin, 1913. 13 с.

2 Alexander, I. W. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions: Ann. of Math. 17, 1915—1916. 12—22 с.

3 Чакалов, Л. Об областях однолистности некоторых классов аналитических функций: ДАН, 1960. 12-19 с.

4 Miller, S.S., Mocany, P.T., Reade, M.O., All α-convex functions are univalent and starlike: Proc.Amer.Math.Soc., 1973. 553—554 с.

5 Авхадиев Ф.Г., Аксентьев, Л.А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций: Успехи математических наук, 1975. 24 с.

6 Рахманов, Б.Н. К теории однолистных функций: ДАН, 1953. 729—732 с.

7 Рахманов, Б.Н. К теории однолистных функций: ДАН, 1954. 973—976 с.

8 Бернацкий, М. Об интеграле однолистных функций: Sci., Math., Astronom., Phys. 8, 1960. 29-34 с.

9 Krzyz, J., Lewandowski, Z. On the integral of univalente functions: Sci. Math., Astron. et Phys. 11, 1963. 447—448 с.

10 Похилевич, В.А. Об одной теореме М.Бернацкого в теории однолистных функций: УМЖ, 1965. 63—71 с.

11 Libera, R. J. Some classes of regular univalent functions: Proc. Amer. Math. Soc. 16, 1965. 755—758 с.

12 Базилевич, И.Е. Обобщение одной интегральной формулы для подкласса однолистных функций: Матем.сборник, 1964. 628-630 с.

13 Прохоров, Д.В. Об одном обобщении класса почти выпуклых функций: Матем. заметки 11, № 5, 1972. 509-516 с.

14 Sheil-Small, T. On Bazilevic functions: Quart. J. Math., 23, № 90, 1972. 135-142 с.

15 Mocanu, P.T. Une propriete de convexite generalisee dans la theorie de la representations conforme: Mathematica, 11, № 1, 1969. 127-133 с.

16 Kaplan, W. Close-to-convex schlicht functions: Michigan Math. J., 1, № 2, 1952. 169-185 с.

17 Renyi, A. Some remarks on univalent functions: Изв.Матем. ин-т Бълг АН, 3, №2, 1959. 111-121 с.

18 Causey, W.M. The close-to-covexity and univalence of an integral: Math. Z., 99, № 3, 1967. 207-212 с.

19 Bernardi, S.D. Convex and starlike univalent functions: Trans. Amer. Math. Soc., 135, 1969. 429-446 с.

20 Singh, R., On Bazilevic function: Proc.Amer. Math. Soc., 38, № 2, 1973. 261-271 с.

21 Максимов, Ю.Д. Экстреальные задачи в некоторых классах аналитических функций: Докл. АН СССР, 100, №6, 1955. 1041-1044 с.

22 Максимов, Ю.Д. О локально ε- выпуклых и локально ε - звездных многолистных функциях: Докл. АН СССР, 103, №6, 1955. 965-967 с.

23 Miller, S.S., Mocanu, P.T. Differential Subordinations / Marcel Dekker: Monographs and Text Books in Pure and Applied Mathematics, 2000. 225с.

24 Breaz, D., Breaz, N. Univalence conditions for certain integral operators: Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 47, № 2, 2002. 9–15 с.

25 Breaz, D., Owa, S., Breaz, N. A new integral univalent operator: Acta Univ. Apulensis Math.Inform. 16, 2008. 11–16 с.

26 Pascu, N.N. On a univalence criterion II: Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 6, 1985. 153-154 с.

27 Breaz D., Breaz N. The univalent conditions for an integral operator on the classes $S(p)$ and Φ2: Theory Appl. 1, 2005. 93-98 с.

28 Breaz D., Breaz N. Univalence of an integral operator: Mathematica 47, № 1, 2005. 35-38 с.

29 Yang, D. and Liu, L. On a class of univalent functions: Int. J. Math. Math. Sci. 22, № 3, 1999. 605-610 с.