Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Компьютерной алгебры и теории чисел

Лемма Шпернера и справедливое деление

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 4 курса 421 Группы
направление (специальность) 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Механико-математического факультета

Напыловой Дарьи Леонидовны

Научный руководитель
зав. каф., к.ф-м.н., доцент ______________ А. М. Водолазов

Зав. кафедрой
зав.каф., к.ф-м.н., доцент ______________ А. М. Водолазов

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Изучение проблемы справедливого деления связана с изобретением способов разделения объекта на несколько частей согласно некоторым понятиям справедливости. Разрезания торта, являющейся проблемой Штайнхауса (1948), пожалуй, наиболее известный пример. Помимо разделения предметов, есть и другие примеры задач, связанные с трудностями справедливого деления. Например, раздел задач о делении Гарднера, 1978; Петерсона и Су, 2002, и разделения аренды квартиры (Брамса и Килгур, 2001; Су, 1999), которая заключалась в следующем: как разделить аренду, так что соседи были удовлетворены разными комнатами.

В настоящее время идеи из комбинаторной топологии предоставили новые и конструктивные методы для получения решения задач справедливого деления. Су (1999) обсуждает разрезания торта процедурой Симмонса, которой может быть расширена и проблема разделения аренды с использованием леммы Шпернера.

Данная работа посвящена рассмотрению различных вариантов применения топологических методов в задачах комбинаторной и выпуклой геометрии, а именно одной из самых первых классических теорем комбинаторной и выпуклой геометрии – леммы Шпернера о триангуляции симплекса.

Лемма Шпернера о раскраске вершин триангуляции, доказанная в 1928 году, является дискретным аналогом теоремы Брауэра о неподвижной точке. У леммы большое число приложений. В частности, эта лемма и ее обобщения играют важную роль в теории игр и математической экономике. Дискретными версиями теоремы Борсука-Улама являются леммы Таккера, Ки Фана и Шашкина. У этих лемм тоже имеются многочисленные приложения.

Следует отметить, что в начале двадцатого века связь между топологией и комбинаторной геометрией выражалась в основном в поисках комбинаторных доказательств основных топологических фактов, связанных с понятием размерности и степени отображения. Типичным примером является уже упомянутая лемма Шпернера. В последнее время наблюдается в основном обратный процесс: содержательные топологические факты находят приложения в комбинаторике и комбинаторной геометрии и часто позволяют по-новому взглянуть на старые результаты.

Целью данной работы является изучение методов комбинаторной геометрии и их различных приложений. Всего в работе 5 разделов. Для начала, рассматривается понятие и принцип неподвижной точки,а так же применение принципа сжимающего отображения для дифференциальных уравнений. Далее следуют сама лемма Шпернера и всевозможные ее доказательства, представленные отдельными теоремами и леммами: теорема Кнастера-Куратовского-Мазуркевича, лемма Таккера, Ки Фана, Ю. Шашкина, теорема Брауэра. В качестве примеров применения леммы Шпернера в теории игр и экономики будут рассмотрены равенство Нэша и конкурентные равновесия.

Краткое содержание работы:

В **Разделе 1** рассматривается понятие неподвижной точки и сжимающего отображения. В качестве примера неподвижной точки приводится дифференциальное уравнение

$$dy/dt = \varphi(y, t),$$

где φ - непрерывная функция, и $y(\cdot)$ - его решение, проходящее через точку (t_0, y_0) (это значит просто, что $y(t_0) = y_0$). Формулируется *принцип неподвижной точки*: если F - непрерывная функция, отображающая отрезок в себя, то имеется хотя бы одна неподвижная точка. Дано определение сжимающего отображения и формулируются теоремы о сущетсвовании не более одной неподвжной точки, а так же сходимость последовательности к неподвижной точке. Основным результатом данного раздела является применение сжимающего отображения к решению дифференциальных уравнений. Принцип сжатых отображений имеет многочисленные применения к доказательствам существования решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, существования неявных функций, методам решения систем линейных уравнений. Продемонстрируем его на примере дифференциальных уравнений. Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t), x(t_0) = x_0.(1.4.3)$$

Здесь $x(t)$ числовая (или векторная) функция от t, где t меняется в некотором интервале $[a, b]$ вокруг t_0. Функция φ предполагается непрерывной.

Для построения решения рассмотрим пространство C непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с равномерной метрикой. Последнее значит, что расстояние между двумя функциями x и y (обе из $[a, b]$ в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}^n$)) равно $\max |x(t) - y(t)|$, где $t \in [a, b]$. Из курса функционального анализа знаем, что пространство C с этой метрикой полное. Свяжем с функцией φ (нелинейный) оператор $A : C \longrightarrow C$, заданный формулой

$$(Ax)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(x(s), t)ds.$$

Он называется *оператором Пикара*.

Уже видели раньше, что неподвижная точка оператора A дает решение дифференциального уравнения (1.1). Естественно искать неподвижную точку как предел последовательных приближений $z, Az, A^2z, ...$, выбрав в качестве нулевого приближения постоянную функцию $z \equiv 0$ (можно, впрочем, начинать и с тождественного нуля).

Раздел 2 посвящен различным доказательствам леммы Шпернера. Для начала дается в рассмотрение первая комбинаторная лемма, другое ее название - лемма Шпернера для отрезка.

Лемма 1 Пусть отрезок разбит конечным множеством точек на малые отрезки. Пусть левый его конец отмечен числом 0, а правый конец - числом 1, и каждая точка деления имеет отместку 0 или1. Тогда существе малый отрезок, концы которого отмечены разными числами. Более того, имеется нечетное число таких отрезков.

Так же дается в рассмотрение вторая комбинаторная лемма, или прогулки по комнатам дома, которая формулируется как отверждение о комнатах и дверях дома. Она говорит о том, что если каждая комната дома имеет 0, либо 1, либо 2 двери, то тогда число тупиков и число наружных дверей имеют одинаковую четность. Определяется крайне важная вещь, называемая теоремой Кнастера-Куравтоского-Мазуркевича(ККМ), которой является также эквивалентной теореме Брауэра. Вместо того, чтобы говорить, что точка симплекса x принадлежит F_s, скажем, что точка x имеет метку s. ККМ утверждает, что существует точка x^*, имеющая все метки. Далее приводится определение пестрого симплекса, с помощью которого показывается, что, если выбирать предельную точку все более мелких пестрых симплексов,то можно видеть, что теорема Брауэра (или ККМ) является следствием леммы Шпернера и существования сколь угодно мелкой триангуляции. Завершается раздел 2 описанием одного из способов постреония мелких триангуляций симплекса Δ_S, использующего барицентрические разбиения. Основным результатом в данном разделе является лемма 4:

Лемма 4(Шпернера, 1928) Пусть дана триангуляция Σ симплекса Δ_S с множеством вершин V. Пусть каждая вершина $v \in V$ помечена некоторым элементом из S, т. е. дано отображение $l : V \longrightarrow S$, причем вершины, лежащие на грани $\Delta_T, T \subset S$, имеют метки из T. Тогда существует симплекс σ нашей триангуляции, вершины которого несут все метки из S.

Доказательство леммы Шпернера проводится по индукции и очевидно верно для 0-мерного симплекса Δ_1. Кроме пестрых симплексов, которые имеют все метки от 1 до n, в рассуждении важную роль играют так называемые полупестрые симплексы, помеченные метками от 1 до $n-1$.

В **Разделе 3** представлены леммы Таккера, Ки Фана и Ю.А.Шашкина,а также их аналоги. Для начала вводится раннее приведенный непрерывным аналог леммы Шпернера, теорема Кнастера–Куратовского–Мазуркевича(ККМ) [6]. Теорема ККМ следует из леммы Шпернера, а из теоремы ККМ, в свою очередь, следует теорема Брауэра о неподвижной точке. Доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке через лемму Шпернера дает некоторый способ вычислительной реализации теоремы Брауэра. Приводится также близкая к лемме Шпернера лемма из [7].

Лемма 5(Таккер, 1946) Пусть T - триангуляция центрально-симметричного выпуклого многогранника $K \subset \mathbb{R}^d$, центрально симметричная на ∂K. Предположим, что на всех вершинах T расставлены метки из множества $\{+1, -1, +2, -2, ..., +d, -d\}$, причем для всякой вершины $v \in \partial K$ сумма меток v и $-v$ равна нулю. Тогда найдется ребро триангуляции T, сумма меток на концах которого равна нулю.

С помощью этой леммы можно доказать не только теорему Брауэра, но и теорему Борсука–Улама.

Следующим этапом в данном разделе становится выделение подраздела, рассматривающего теоремы Босука-Улама, Люстерника-Шнирельмана, теорему «о бутерброде». В данном подразделе приводятся три эквивалентных формулировки теоремы Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана [8], [9], которые тесно связаны с теоремами Хелли и Брауэра.

Теорема 3 (Борсук, Люстерник, Шнирельман, 1930–1933) Если сфера S^n покрыта $n+1$ замкнутым множеством $X_1, ..., X_{n+1}$, то по крайней мере одно из X_i содержит пару диаметрально противоположных точек на сфере.

Теорема 4 (Борсук, Улам, 1933) Если на сфере S^n даны n нечетных непрерывных функций $f_1, ..., f_n$, то для некоторой точки $x \in S^n$

$$f_1(x) = ... = f_n(x) = 0.$$

Теорема 5 (Борсук, Улам,1933) Для всякого непрерывного отображения $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ найдется точка $x \in S^n$, для которой $f(x) = f(-x)$.

Из теоремы Борсука–Улама также можно вывести теорему Брауэра о неподвижной точке. В завершение данного раздела приводится так называемый теорема Борсука–Улама для покрытий, допускающая другую формулировку: $(d-1)$-мерную сферу диаметра 1 нельзя покрыть d множествами диаметра меньшего 1. На основе этого факта Борсук сформулировал гипотезу.

Гипотеза1.(Борсук, 1993)

Любой выпуклый компакт $K \subset \mathbb{R}^d$ можно разбить на $d{+}1$ множество меньшего диаметра.

Эта гипотеза и близкие к ней вопросы фигурируют в литературе под названием “проблема Борсука”. Для гладких компактов гипотеза Борсука доказывается довольно просто, но в случае негладких компактов был обнаружен контрпример [12], более того, оказалось, что порядок роста требуемого количества множеств разбиения не менее $1.2^{\sqrt{d}}$, что сильно отличается от предполагаемых $d+1$ при достаточно больших d.

Раздел 4 полностью посвящен теореме Брауэра о неподвижной точке. Для начала приводится определение выпуклого множества, а так же свойство выпуклости, которое влечет, что X не имеет «дырок», а это дает надежду на существование неподвижных точек для широкого класса отображений. В данном разделе рассматриваеются непрерывные отображения. Основными в данном разделе является следующая теорема:

Теорема 8 (Брауэра, 1910) Пусть X - выпуклое компактное подмножество конечномерного пространства, а отображение $f : X \longrightarrow X$ непрерывно. Тогда существует неподвижная точка f.

Теорема Брауэра, будучи весьма нетривиальной, имеет много различных доказательств, использующих разные методы и подходы. Без преувеличения можно сказать, что эти доказательства служат хорошим введением во многие области математики. Оригинальное доказательство Брауэра использовало теорию индексов векторных полей. Приведенное доказательство в данной работе опиралось на комбинаторную лемму Шпернера. Далее в разделе приводятся три других доказательств теоремы Брауэра. Одним из них является *алгебраическая топология*. Метод алгебраической топологии состоит в построении подходящего функтора из топологии в алгебру. Недостаток этого подхода - в необходимости развития гомологического формализма, несомненно, полезного для многих других задач, но явно чрезмерного применительно к теореме Брауэра. Отметим, что построение групп гомологий использует триангуляции, появляющиеся в лемме Шпернера.

В подразделе 4.1. приводится более важное для экономических приложений обобщении теоремы Брауэра, принадлежащее Какутани. Обобщение состоит в том, что вместо однозначных непрерывных отображений допускаются и многозначные. Дело в том, что многие естественные объекты в матэкономике появляются как решения задачи максимизации функций (или предпочтений), а решение таких задач в общем случае многозначное.

Теорема 9 (Какутани, 1941) Пусть X - выпуклый компакт, а F - замкнутое соотвествие X в себя с непустыми выпуклыми образами. Тогда существует такая точка $x^* \in X$, что $x^* \in F(x^*)$. Кстати, из теоремы Какутани легко получить и такое обобщение теоремы Брауэра на случай произвольных (разрывных) отображений f выпуклого компакта в себя.

В **разделе 5** выпускной квалификационной работы рассмотривается применение теоремы Брауэра: к равновесию Нэша в играх и к экономическому равновесию. Основными результатами раздела являются доказательства с помощью комбинаторных теорем следующих утверждений:

Теорема 10 (Нэш, 1950) Предположим, что каждое множество S_i - выпуклый компакт, а функции выигрыша u_i непрерывны по всем переменным и вогнуты по s_i. Тогда существует равновесие Нэша.

Лемма 10 (Гейл, 1955; Никайдо, 1956) Пусть Δ_l - единичный симплекс, и E - замкнутое соответствие из Δ_l в компактное выпуклое подмножество $K \subset \mathbb{R}^l$ с выпуклыми непустыми образами. Предположим, что $pz \leq 0$ для любых $p \in \Delta_l$ и $z \in E(p)$. Тогда существуют $p^* \in \Delta_l$ и $z^* \in E(p^*)$, такие что $z^* \leq 0$.

Также указывается, что в работе (приложение) присутствует программа, иллюстрирующая применение леммы Шпернера для разбиения треугольника, которую можно применять для различных задач справедливого деления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе были описаны основные понятия и важные теоремы комбинаторной и выпуклой геометрии. На основе этого были рассмотрены неподвижные точки и сжимающие отображения, их принципы, а также классическая комбинаторная лемма Шпернера. Была подробно рассмотрена теорема Брауэра о неподвижной точке, применяемая в таких областях математики как: теория игр и математическая экономика, а именно применяется в доказательстве равновесия Нэша. На основе всего изложенного была написана программа, иллюстрирующая применение леммы Шпернера для разбиения треугольника, которую можно применять для различных задач справедливого деления.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Шашкин, Ю.А. Неподвижные точки. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, с.80.

2 Данилов, В.И. Лекции о неподвижных точках. – Российская экономическая школа, Москва, 2006, с.30.

3 Известный, Н.Е. Неподвижные точки - страшное орудие экономистов. – Зурбаган, 2013, с.6-14.

4 Карасев, Р.Н. Теоремы типа Борсука-Улама в комбинаторной и выпукной геометрии. – Долгопрудный, 2010, с.81-98.

5 Карасев, Р.Н. Топологические методы в комбинаторной геометрии. – УМН, 2008, с.42-44.

6 Sperner, E. Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. – Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1928, p.265-272.

7 Knaster, B., Kuratowski, C., Mazurkiewicz, S. Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe. – Fund. Math., 1929, p.132-137.

8 Tucker, A.W. Some topological properties of disk and sphere. – Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress (Montreal, 1945), University of Toronto Press, Toronto, 1946, p. 525.

9 Люстерник, Л.А., Шнирельман, Л.Г. Топологические методы в вариационных задачах. – ГНТИ, М., 1930, с.375—382.

10 Borsuk, K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. – Fund. Math., 1933, p.177–190.

11 Stone, A.H., Tukey, J.W. Generalized ‘sandwich’ theorems. – Duke Math. J., 1942, p.356-359.

12 Steinhaus, H. Sur la division des ensembles de l’espace par les plans et des ensembles plans par les cercles. – Fund. Math., 1945, p.245–263.

13 Kahn, J., Kalai, G. A counterexample to Borsuk’s conjecture. – Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 1993, p.60-62.

14 Musin, O.R., Borsuk–Ulam type theorems for manifolds. – Proc. Amer. Math. Soc., 2012, p. 2551–2560.

15 Musin, O.R., Sperner type lemma for quadrangulations. – Mosc. J. of Combin. and Number Theory., 2015, p.26–35.

16 Musin, O.R., Extensions of Sperner and Tucker’s lemma for manifolds. – J. of Combin. Theory Ser. A., 2015, p.172–187.

17 Musin, O. R., Volovikov, A. Yu. Borsuk–Ulam type spaces – Mosc. Math. J., 2015, p.749–766.
18 Francis, Edward Su. Rental harmony: Sperner's lemma in fair division. – Amer. Math. Monthly, 1999, p.930–942.
19 Болтянский, В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. – М.: Наука, 1982, с.16-21, 37.
20 Tucker, A. W., Some topological properties of disk and sphere. – In Proc. First Canadian Math. Congress, Montreal, 1945, p.285–309.