Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Компьютерной алгебры и теории чисел

Некоторые вопросы эквивалентности расширенной гипотезы Римана

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направление 02.03.01 математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Сагателян Лусине Овиковны

Научный руководитель
доцент, к.ф-м.н., доцент В. В. Кривобок

Зав. кафедрой
зав.каф., к.ф-м.н. А. М. Водолазов

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза Римана о распределении нулей дзета-функции Римана была сформулирована Бернхардом Риманом в 1859 году. Риман обнаружил, что количество простых чисел, не превосходящих x, — это функция распределения простых чисел, обозначаемая $\pi(x)$. Она выражается через распределение так называемых «нетривиальных нулей» дзета-функции.

Нули дзета-функции делятся на два типа: тривиальные и нетривиальные нули. Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ определена для всех комплексных $s \neq 1$ и имеет нули в отрицательных чётных $s = -2, -4, -6 \ldots$.

Числа $-2, -4, -6, \ldots, -2k, \ldots$ называют тривиальными нулями дзета-функции, и других вещественных нулей у этой функции нет.

Из функционального уравнения

$$\zeta(s) = 2^s \pi^s \sin\frac{\pi s}{2} \frac{1}{\sin(\pi s)\Gamma(s)} \zeta(1-s)$$

и явного выражения

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad Res > 1,$$

где $\mu(n)$ - функция Мёбиуса, следует, что все остальные нули, называемые «нетривиальными», расположены в полосе $0 < Res < 1$ симметрично относительно так называемой «критической линии» $\frac{1}{2} + it, t \in \mathbb{R}$.

Гипотеза Римана утверждает, что:

Все нетривиальные нули дзета-функции имеют действительную часть, равную $\frac{1}{2}$.

L–функции Дирихле – функции комплексного переменного, подобные дзета–функции Римана, введены Дирихле при исследовании вопроса о распределении простых чисел.

Пусть k–натуральное число и χ–какой-либо характер по модулю k.

L–функцией Дирихле называется ряд

$$L = L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}s > 1.$$

Расширенная гипотеза Римана состоит из того же самого утверждения для обобщений дзета-функций, называемых L-функциями Дирихле.

Данная работа посвящена изучению и некоторым вопросам связи расширенной и основной гипотезам Римана. Бакалаврская работа состоит из четырех разделов. В первом разделе даются общие сведения о дзета-функции Римана и L-функции Дирихле и доказываются их функциональные уравнения. Во втором разделе и в третьем доказываются утверждения, эквивалентные основной и расширенной гипотезам Римана. В четвертом разделе описывается метод редукции к степенным рядам, в качестве которого доказываются утверждения гипотез Римана.

Основное содержание работы:

В **Разделе 1** рассматриваются основные понятия, такие как ζ-функция и L–функция Дирихле.

Дзета-функция Римана — функция $\zeta(s)$ комплексного переменного $s = \sigma + it$, при $\sigma > 1$ определяемая с помощью ряда Дирихле.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

L–функцией Дирихле называется ряд

$$L = L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad Res > 1,$$

где $\chi(n)$ – некоторый числовой характер по модулю k.

Связь между суммой коэффициентов ряда Дирихле представлена в теореме 1.

Теорема 1. *Пусть ряд (1) для $f(s)$ абсолютно сходится при $\sigma > 1, |a_n| \leq A(n)$, где $A(n) > 0$ – монотонно возрастающая функция n и при $\sigma \to 1 + 0$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O\left((\sigma - 1)^{-\alpha}\right), \alpha > 0.$$

Тогда при любых $b_0 \geq b > 1, T \geq 1, x = N + \frac{1}{2}$, имеет место формула

$$\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s}{s}\, ds + O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^\alpha}\right) + O\left(\frac{xA(2x)\log x}{T}\right),$$

где постоянная в знаке O зависит только от b_0.

Были доказаны функциональные уравнения $\zeta(s)$-функции L–функции Дирихле в теореме 2 и 3. Исходя из уравнений, эти функции можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость. Однако $\zeta(s)$-функция аналитически продолжима, за исключением точки $s = 1$.

Теорема 2. (Функциональное уравнение дзета-функции)

Имеет место равенство

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Теорема 3. (Функциональное уравнение.) *Пусть χ–примитивный характер по модулю k,*

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } \chi(-1) = 1; \\ 1, & \text{если } \chi(-1) = -1; \end{cases}$$

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-(s+\delta)/2}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi).$$

Тогда справедливо равенство

$$\xi(1-s,\bar{\chi}) = \frac{i^\delta\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\xi(s,\chi) \tag{12}$$

В **Разделе 2** доказывается утверждение, эквивалентное основной гипотезы Римана.

Наиболее характерным свойством дзета-функции Римана является тождество, которое может быть записано двумя формулами

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \tag{14}$$

(n пробегает все целые числа) и

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \tag{15}$$

Введя обозначение

$$M(x) = \sum_{n \leqslant n}\mu(n),$$

можно сформулировать утверждение, эквивалентное основной гипотезе Римана.

Теорема 7. *Для справедливости гипотезы Римана необходимо и достаточно, чтобы имела место оценка*

$$M(x) = O(x^{1/2+\varepsilon}) \tag{19}$$

В **Разделе 3** доказываются утверждения, эквивалентные расширенной гипотезы Римана.

Теорема 11. *Расширенная гипотеза Римана для L–функции эквивалентна оценке вида*

$$\sum_{p} \chi(p) \ln p x^{p} = O((1-x)^{-\frac{1}{2}-\sigma}) \tag{28}$$

при $x \longrightarrow 1$, где суммирование ведется по всем простым p, ε произвольное положительное число, а константа в оценке не зависит от x.

Теорема 12. Расширенная гипотеза Римана для L–функции (27) эквивалентна оценке вида

$$\sum_{p \leqslant x} \chi(p) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \tag{30}$$

где ε произвольное положительное число, а константа в оценке не зависит от χ.

Доказанный результат является результатом, полученным в последнее время на кафедре компьютерной алгебры и теории чисел. Из него, в частности, следует ответ на вопрос, насколько произвольно можно менять характеры Дирихле, чтобы в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$ нули соответствующего ряда Дирихле совпадали с нулями L–функции Дирихле. А именно, имеет место теорема 4 из [3].

Этот факт представляет интерес в связи с известной гипотезой Н. Г. Чудакова о том, что мультипликативная функция натурального аргумента $h(n)$, удовлетворяющая условиям:

1. Почти для всех простых $p : h(p) \neq 0$
2. Ограниченность сумматорной функции

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} h(n),$$

является характером Дирихле.

Отметим так же, что условие (30) определяет вычислительную схему, реализация которой позволяет в какой то степени говорить об истинности расширенной гипотезы Римана или об ее опровержении.

В соответствии с рисунком 3 приведен график поведения функции

$$f(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{h(p)}{\sqrt{x}}$$

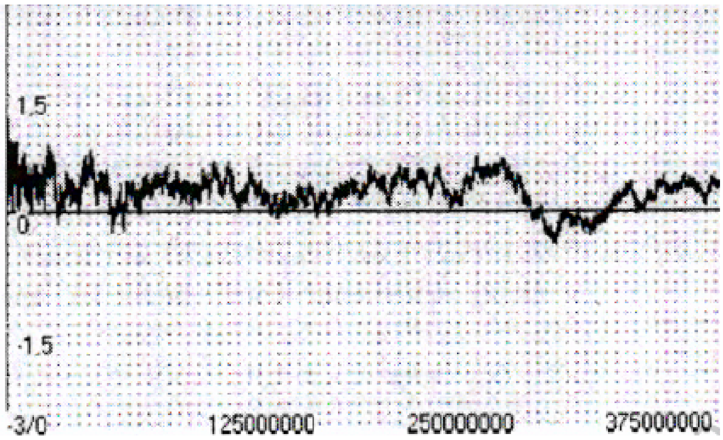

Рисунок 3

для характера Дирихле

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0(mod3); \\ 1, & n \equiv 1(mod3); \\ -1, & n \equiv -1(mod3). \end{cases}$$

График косвенно подтверждает расширенную гипотезу Римана. Более того, от позволяет высказать предположение, что

$$\sum_{p \leqslant x} \chi(p) \leqslant \sqrt{x}.$$

Примеры вычислений, связанных с характером Дирихле модуля 3 и модуля 5 не только косвенное подтверждают гипотезу Римана, но приводят к следующему предположению:

Для любого неглавного характера Дирихле $\chi(n)$ имеет место оценка вида:

$$\sum_{p \leqslant x} \chi(p) = O(\sqrt{x}),$$

где константа в оценке зависит только от модуля характера.

Это предположение является в какой-то степени обобщением гипотезы Мертенса [2] о том, что имеет место оценка

$$\sum_{m \leqslant x} \mu(n) \leq \sqrt{x},$$

где $\mu(n)$ – функция Мебиуса.

Раздел 4 рассматривает связь основной и расширенной гипотезы Римана.

В данном разделе рассмотрен метод редукции к степенным рядам, который позволил выразить отдельные аналитические свойства этих L-функций в терминах граничных свойств соответствующих степенных рядов.

Были получены необходимые и достаточные условия на ряды Дирихле. А именно, доказана теорема 15, которая не требует конечнозначности коэффициентов.

Теорема 15. *Ряд Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad s = \sigma + it, \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \tag{40}$$

тогда и только тогда определяет целую функцию, порядок роста модуля которой удовлетворяет условию (39), когда соответствующий степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

определяет функцию, регулярную в точке $z = 1$.

Как следствие теоремы 15 получается следующий аппроксимационный критерий для рядов Дирихле, определяющих целые функции, модуль которых удовлетворяет условию роста (39) в левой полуплоскости. Имеет место

Теорема 16. *Ряд Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad s = \sigma + it, \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

тогда и только тогда определяет целую функцию, порядок роста модуля которой удовлетворяет условию (39), когда существует последовательность некоторых полиномов Дирихле $\{T_n(s)\}$, *аппроксимирующих функцию* $f(s)$ *в любой полосе* $\sigma > \sigma_0 > \sigma_c;\ |t| < T$ *со скоростью порядка* $O\left(\frac{1}{\rho^n}\right)$, *где* $\rho > 1$ *и константа не зависит от* n.

В качестве применения метода редукции к степенным рядам доказываются следующие утверждения. Но прежде, определим функцию Мангольдта.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^k; \\ 1, & \text{если } n \neq p^k. \end{cases}$$

Теорема 17. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *для нулей ζ-функции имеет место гипотеза Римана;*
2. *имеет место следующая асимптотическая оценка*

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n) = x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \tag{55}$$

где ε — произвольная положительная величина.

Теорема 18. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *для нулей L-функции Дирихле $L(s,\chi)$, где χ — неглавный характер Дирихле, имеет место расширенная гипотеза Римана;*
2. *имеет место следующая асимптотическая оценка*

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \tag{56}$$

где ε — произвольная положительная величина.

Теорема 19. *Пусть степенной ряд $g(z)$, отвечающий логарифмической производной ζ-функции Римана*

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)z^n,$$

во всех точках единичной окружности $z = e^{2\pi i n\varphi}$, где φ — рациональное число, не равное 0, асимптотически ведет себя следующим образом:

$$g(re^{2\pi n i\varphi}) = O((1-r)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}), \quad r \to 1-0, \tag{58}$$

где ε — произвольное положительное число; а в точке $z=1$ имеет место оценка:

$$g(x) = \frac{1}{1-x} + O((1-r)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}), \quad r \to 1-0. \tag{59}$$

Тогда имеет место расширенная гипотеза Римана.

Теорема 20. *Пусть для любого рационального φ, не равного 0, имеет место оценка*

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)e^{2\pi i n\varphi} = O(1),$$

где константа не зависит от x.

Тогда имеет место расширенная гипотеза Римана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе рассматривались вопросы об аналитическом продолжении дзета-функции и L-функции Дирихле, об их функциональных уравнениях, которые помогают раскрыть поведении дзета-функции и L-функции на комплексной плоскости.

Во втором разделе и в третьем были рассмотрены и доказаны утверждения, эквивалентные основной и расширенной гипотезам Римана.

В завершении работы был рассмотрен метод исследования аналитических свойств функций,заданных рядами Дирихле - метод редукций к степенным рядам. В качестве этого метода были доказаны некоторые утверждения, эквивалентные основной и расширенной гипотезам Римана.

Был построен код реализации функции Мангольдта.

Гипотеза Римана встречается не только в аналитической теории чисел, но и в других областях математики, например, в криптографии. Если справедлива так называемая расширенная гипотеза Римана, то наименьший квадратичный невычет может быть оценен сверху величиной $2 \ln 2p$. Таким образом, получается полиномиальная оценка сложности алгоритма. К сожалению, она носит условный характер, ведь даже обычная гипотеза Римана все еще не доказана.