Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Исследование поверхностей методами дифференциальной геометрии

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

Механико-математический факультет

ДУБОВА ИЛЬИ АНДРЕЕВИЧА

Научный руководитель
Профессор, д. пед.н., профессор ________________________ В.И.ИГОШИН
подпись, дата

Зав. кафедрой
доктор физ-мат. наук, профессор ________________________ В.В.РОЗЕН
подпись, дата

Саратов 2017

Введение

Актуальность работы. Работа посвящена применению методов математического анализа к изучению геометрических свойств поверхности в пространстве. Тем самым демонстрируется взаимопроникаемость двух старейших и фундаментальных математических дисциплин – геометрии и математического анализа и единства математики как науки.

Целями работы являются: 1) изучение методов математического анализа, применяемых к исследованию свойств поверхности, внутренней геометрии поверхностей; 2) применение этих методов «в ручном режиме» к исследованию свойств конкретных поверхностей; 3) применение этих методов к изучению свойств конкретных поверхностей с использованием современных систем компьютерной математики.

В соответствии с поставленными целями были определены и решены следующие *задачи*:

1) дан подробный исторический экскурс о месте дифференциальной геометрии в истории развития геометрии и математики в целом (во введении);

2) введено понятие поверхности и определены способы ее задания (в разделе 1);

3) определены понятия касательной плоскости и нормали к поверхности в точке и получены их уравнения в зависимости от способа задания поверхности (в разделе 2);

4) введено понятие 1-ой квадратичной формы поверхности и с её помощью решены метрические задачи на поверхности: на вычисления длин линий на поверхности, углов между линиями и площадей участников поверхности (в разделе 3);

5) введение понятия 2-ой квадратичной формы поверхности и с её помощью решены задачи вычисления кривизны линии на поверхности и кривизны поверхности (в разделе 4);

6) введено понятие внутренней геометрии поверхности; показано, что к ней относятся длины линий площади участка поверхности, углы между линиями площади участка поверхности, а также полная (гауссова) кривизны поверхности (в разделе 4);

7) по каждой из теоретических задач на поверхности рассмотрены и решены, как «вручную», так и с помощью современных средств компьютерной математики конкретных задач для конкретных поверхностей (во всех разделах).

Краткое содержание работы. Работа состоит из введения, четырёх разделов, которые содержат подразделы, списка использованной литературы и заключения.

В разделе I вводится понятие поверхности и описываются способы ее задания – векторный, координатный, параметрический, явный, неявный. Среди точек поверхности выделяются особые точки, которые исключаются из дальнейшего рассмотрения. На заданной поверхности вводятся криволинейные (гауссовы) координаты. Определяются понятия двух бесконечных семейств координатных линий на поверхности. Показывается, как с помощью криволинейных (гауссовых) координат на поверхности задаются линии. Самостоятельно решаются две задачи о способах задания однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

В разделе II определяется понятие касательной плоскости к поверхности в данной точке. Выводится уравнение касательной плоскости в случае, когда поверхность задана параметрическим образом – в векторной форме и в координатной форме, и когда поверхность задана неявным уравнением. Затем определяется понятие нормали к поверхности в данной точке. Также выводится уравнение этой прямой в случае, когда поверхность задана параметрическим образом – в векторной форме и в координатной форме, и когда поверхность задана неявным уравнением. Самостоятельно решаются три задачи о нахождении касательной плоскости и нормали в точках прямого геликоида, эллипсоида и некоторых других конкретных поверхностей.

В разделе III посвящен метрическим вычислениям на поверхности. К таким вычислениям относится нахождение длины дуги линии на поверхности, нахождение угла между линиями на поверхности и нахождение площади участка поверхности. Основным инструментом для решения этих задач является I (первая) квадратичная форма поверхности, которая как раз и представляет собой линейный элемент поверхности. Показывается, что значение I квадратичной формы поверхности представляет собой квадрат дифференциала длины дуги линии, лежащей на поверхности, при бесконечно малом смещении точки вдоль этой линии. Самостоятельно решается задача на нахождение длины дуги конкретной линии, лежащей на конкретной поверхности, между двумя конкретными точками этой поверхности.

Далее, в этом разделе определяется понятие угла между двумя линиями, лежащими на поверхности, и показывается, как I квадратичная форма поверхности используется для решения и этой метрической задачи на поверхности. Используя полученный результат, находится формула для вычисления угла между координатными линиями произвольной поверхности, а также самостоятельно решается задача на нахождение угла между двумя конкретными линиями, лежащими на конкретной поверхности.

Наконец также с использованием I квадратичной формы поверхности показывается, как можно вычислять площади участков поверхности, ограниченных линиями, лежащими на поверхности, и самостоятельно решается соответствующая конкретная задача.

Раздел IV изучению кривизны линий на поверхности и кривизн самой поверхности. Для этих целей вводится понятие второй квадратичной формы поверхности, выводятся вычислительные формулы для нахождения коэффициентов этой формы при разных способах задания поверхности – параметрическом (векторном и координатном) и явном. Самостоятельно решается задача на нахождение 2-ой квадратичной формы прямого геликоида.

Далее, в этом разделе вводится понятие нормальной кривизны линии на поверхности и нормальной кривизны поверхности в точке в заданном направлении и самостоятельно решается конкретная задача о вычислении нормальной кривизны геликоида в конкретной точке в заданном конкретном направлении. Определяется понятие главного направления на поверхности и понятия главных кривизн поверхности в точке. Приводится теорема Л.Эйлера о главных направлениях и главных кривизнах поверхности в точке. Самостоятельно решается задача на нахождение главных направлений и главных кривизн в каждой точке прямого геликоида.

Наконец, вводятся понятия полной (гауссовой) кривизны и средней кривизны поверхности и самостоятельно решается задача на нахождение полной (гауссовой) кривизны прямого геликоида.

В заключение дается понятие о внутренней геометрии поверхности. Показывается, что к ней относятся те свойства и величины поверхности, которые могут быть охарактеризованы или вычислены в терминах первой квадратичной формы поверхности. Это, как мы уже знаем, длины кривых, углы между кривыми и площади участков поверхности. Приводится теорема К.-Ф.Гаусса о том, что полная (гауссова) кривизна поверхности также относится к её внутренней геометрии.

В заключении кратко подводятся итоги проведенного исследования. Основными методами, используемыми в работе, являются методы дифференциального и интегрального исчислений, применяемые к вектор-функциям $\vec{r}(u,v)$ двух вещественных аргументов u и v, которые задают исследуемые поверхности.

Содержание выпускной квалификационной работы.

Раздел I. **Понятие поверхности и способы задания поверхностей в пространстве**

Определение 1.1. Поверхность S – это годограф такой вектор-функции двух скалярных аргументов $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, которая удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \nparallel \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \quad , \qquad \text{или} \qquad [\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}] \neq \vec{0}.$$

Если вектор-функцию $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ разложить по ортонормированному базису, то возникнут координатные функции: $x = x(u, v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u, v)$. Они задают поверхность в *координатах* S: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. Это задание называется параметрическим заданием поверхности, где $(u, v) \in D$, причём

$$rank\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2, \qquad\qquad (u, v) \in D.$$

Поверхность $S : \vec{r} = \vec{r}(u,v)$ называется *гладкой поверхностью класса* $C^k[D]$, если функция $\vec{r}(u,v)$ имеет на D непрерывные производные до k-ого порядка включительно. Поверхность называется *кусочно гладкой*, если она составлена из нескольких гладких кусков. Поверхность может быть задана явно: $z = f(x, y)$, или неявно: $F(x, y, z) = 0$.

Если S: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, то каждой точке M поверхности соответствует пара чисел (u, v). Они называются *криволинейными (или гауссовыми) координатами точки поверхности*: $M(u, v)$.

Определение 1.2. Линии на поверхности, вдоль которых постоянна одна из координат, называются *координатными*.

1-ая координатная линия (u-линия) задается параметрически: в криволинейных координатах на поверхности: $u = t$, $v = v_0$ (v_0 – $const$); в пространственных координатах: $x = x(t, v_0)$, $y = y(t, v_0)$, $z = z(t, v_0)$.

2-ая координатная линия (v-линия) задается параметрически: в криволинейных координатах: $u = u_0$, $v = t$ (u_0 – $const$); в пространственных координатах: $x = x(u_0, t)$, $y = y(u_0, t)$, $z = z(u_0, t)$.

Координатные линии на поверхности образуют *координатную сеть*.

Самостоятельно решаются две задачи на способы задания поверхностей в пространстве.

Задача 1.1. Показать, что вектор-функция

$$\vec{r}(u, v) = a\frac{1+uv}{u+v}\vec{i} + b\frac{v-u}{u+v}\vec{j} + c\frac{uv-1}{u+v}\vec{k}, \qquad (u, v) \in R^2, \quad u \neq v,$$

определяет однополостный гиперболоид. Каковы координатные линии поверхности при указанной параметризации?

Задача 1.2. Написать параметрическое уравнение гиперболического параболоида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$, приняв за координатные линии его прямолинейные образующие.

Раздел II. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Определение 2.1. Касательной плоскостью к гладкой поверхности в некоторой ее точке называется плоскость, содержащая касательные прямые ко всем гладким кривым, лежащим на поверхности и проходящим через эту точку.

Выводятся уравнения касательной плоскости при разных способах задания поверхности.

Если поверхность задана параметрически в векторной форме S: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, то уравнение имеет вид: в векторной форме $\left(\vec{R} - \vec{r}\right)\overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{r_v} = 0$, и в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Если поверхность задана неявно: S: $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости имеет вид: в векторной форме $\vec{N}(\vec{R} - \vec{r}) = 0$, где $\vec{N}\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$; и в координатной форме:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

*Определение 2.2***.** *Нормаль* к поверхности в данной точке – это прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной плоскости к поверхности в этой точке.

Выводятся уравнения нормали к поверхности при разных способах задания поверхности.

Если поверхность задана параметрически в векторной форме S: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, то уравнение имеет вид: в векторной форме $\vec{R}(\lambda) = \vec{r}(u, v) + \lambda\,[\overrightarrow{r_u}, \vec{r}_v]$, и в координатной форме:

$$\begin{cases} X = x + \lambda \cdot \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \\ Y = y + \lambda \cdot \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} \\ Z = z + \lambda \cdot \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \end{cases}$$
, где $\lambda \in R$ – произвольный вещественный параметр.

Если поверхность задана неявно: S: $F(x, y, z) = 0$, то уравнение нормали имеет вид: в векторной форме $\vec{R}(\lambda) = \vec{r}(u, v) + \lambda \cdot \vec{N}$, где $\vec{N}(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$; и в координатной форме:

$$\begin{cases} X = x + \lambda \cdot F_x \\ Y = y + \lambda \cdot F_y \\ Z = z + \lambda \cdot F_z \end{cases} ;$$

каноническое уравнение нормали:

$$\frac{X - x}{F_x} = \frac{Y - y}{F_y} = \frac{Z - z}{F_z} .$$

Если требуется найти орт (единичный вектор) нормали, то вектор $[\overrightarrow{r_u}, \vec{r}_v]$ необходимо нормировать, то есть поделить на его модуль:

$$\vec{m} = \frac{[\overrightarrow{r_u}, \ \vec{r}_v]}{|[\overrightarrow{r_u}, \ \vec{r}_v]\,|} .$$

Самостоятельно решаются три задачи о нахождении касательной плоскости и нормали в точках прямого геликоида, эллипсоида и некоторых других конкретных поверхностей.

Задача 2.1. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к прямому геликоиду:

$$x = u\cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = av, \qquad \text{где } \ u > 0, \qquad v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

в точках, в которых нормаль параллельна вектору $\vec{p}(1, 2, 3)$.

Задача 2.2. Доказать, что линия $x = \frac{2}{1+t}$, $y = \frac{2}{1-t}$, $z = t$, $(t \neq \pm 1)$ лежит на поверхности $z = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$ и ее соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью к поверхности в каждой точке этой линии.

Задача 2.3. Найти вектор нормали, нормаль и касательную плоскость в произвольной точке $P(x_0;\ y_0;\ z_0)$ эллипсоида – поверхности, заданной уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ .$$

Раздел III . **Метрические вычисления на поверхности**

К таким вычислениям относится нахождение длины дуги линии на поверхности, нахождение угла между линиями на поверхности и нахождение площади участка поверхности. Основным инструментом для решения этих задач является I (первая) квадратичная форма поверхности.

Пусть гладкая поверхность S задана параметрически в векторной форме:

$$S:\ \ \vec{r}=\vec{r}(u,\ v),$$

или в координатной форме:

$$S:\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v).\end{cases}$$

Пусть, далее, гладкая линия L на поверхности S задана параметрическими уравнениями в криволинейных координатах:

$$L:\ \ u=u(t),\quad v=v(t)\ .$$

Выводится формула, позволяющая вычислять длину линии, лежащей на поверхности:

$$s=\int_{t_2}^{t_1}\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$$

$$=\int_{t_2}^{t_1}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2dt^2+2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}dt^2+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\cdot dt^2}$$

$$=\int_{t_2}^{t_1}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\cdot dt\ ,$$

где $E=\vec{r}_u^{\,2}$, $F=\vec{r}_u\vec{r}_v$, $G=\vec{r}_v$ – коэффициенты **I** (первой) квадратичной формы поверхности $(\mathbf{I})=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$, или ее линейный элемент.

Самостоятельно решается задача на нахождение длины дуги конкретной линии, лежащей на конкретной поверхности, между двумя конкретными точками этой поверхности.

Задача 3.1. Найти длину дуги линии $\gamma: u = \frac{1}{2}av^2, a \neq 0$, лежащей на поверхности: $x = \frac{1}{2}u(\sqrt{3}\ \sin v + \cos v)$, $y = \frac{1}{2}u(\sqrt{3}\ \sin v - \cos v)$, $z = av$, заключенной между точками A (u = 0, v = 0) и B (u = 2a, v = 2).

*Определение***.** *Углом между двумя линиями* называется угол между касательными к этим линиям в точке их пересечения.

Выводится формула, позволяющая вычислять углы между линиями, лежащими на поверхности. Для этого также используется **I (**первая) квадратичная форма поверхности:

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta v + F(du\delta v + dv\delta du) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edv^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \cdot \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

Используя полученный результат, находится формула для вычисления угла между координатными линиями произвольной поверхности (**Задача 3.2:** $\cos\theta = \frac{F\cdot dt\cdot\delta r}{\sqrt{E\cdot dt^2}\cdot\sqrt{G\cdot\delta r^2}} = \frac{F}{\sqrt{E\cdot G}}$ **)**, а также самостоятельно решаются две задачи на нахождение углов между двумя конкретными линиями, лежащими на конкретных поверхностях.

Задача 3.3. Найти угол между координатными линиями поверхности S, задаваемой вектор-функцией:

$$\vec{r}(u,v) = u\cdot\vec{i} + v\cdot\vec{j} + u\cdot v\cdot\vec{k} \qquad \text{в точке } M(1,3).$$

Задача 3.4. Найти угол между линиями $l_1: u = v^2$ и $l_2: u = v$, лежащими на поверхности $S: x = u\ \cos v,\ y = u\sin v,\ z = 3(u+v)$.

Даются иллюстрации полученных результатов с помощью системы компьютерной математики MatLab.

Наконец также с использованием I квадратичной формы поверхности показывается, как можно вычислять площади участков поверхности, ограниченных линиями, лежащими на поверхности, и самостоятельно решается соответствующая конкретная задача.

Строгое математическое определение понятия площади поверхности соответствует наглядным представлениям об измерении площади «кривой» поверхности, при котором поверхность разбивают на достаточно мелкие части и считают их почти плоскими. Затем осуществляется предельный переход при условии, что размеры этих мелких частей неограниченно уменьшаются. Доказывается, что при определенных ограничениях на поверхность этот предел существует и он принимается за площадь поверхности. А именно имеет место следующая теорема.

Теорема 3.5. Если P – компактная область гладкой поверхности S с кусочно – гладкой границей, то площадь $\sigma(P)$ области P существует. При этом если поверхность S заданы параметрически $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, то

$$\sigma(P) = \iint_Q |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \, du \cdot dv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \cdot du \cdot dv, \qquad (1)$$

где Q – область на плоскости параметров u, v, соответствующая области P поверхности.

Доказывается равенство: $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \sqrt{EG - F^2}$.

Самостоятельно решается следующая задача:

Задача 3.6. На прямом геликоиде $S: x = u \cdot \cos v$, $y = u \cdot \sin v$, $z = a \cdot v$ $(u \in (-\infty, \infty),\ v \in (-\infty, \infty))$, имеются четыре линии $l_1: u = 0$, $l_2: u = a$, $l_3: v = 0$, $l_4: v = 1$, которые ограничивают на поверхности криволинейный четырёхугольник. Найти его площадь.

Раздел IV . **Кривизна линий на поверхности и кривизны поверхности**

Изучение пространственного строения окрестности точки на поверхности производится с помощью 2-ой квадратичной формы, которая и рассматривается в данном разделе. Эта форма возникает при решении задачи о нахождении кривизны линии, лежащей на поверхности.

Выражение $L \cdot du^2 + 2M \cdot du \cdot dv + N \cdot dv^2$ называется 2-*ой квадратичной формой* поверхности. Её коэффициенты L, M, N представляют собой функции $L(u, v)$, $M(u, v)$, $N(u, v)$ от двух аргументов, принимающие какие-то значения в каждой точке $K(u, v)$ поверхности S, и вычисляемые по следующим формулам:

$$L = \vec{m} \cdot \vec{r}_{uu} = \frac{[\vec{r}_u,\ \vec{r}_v]\vec{r}_{uu}}{|[\vec{r}_u,\ \vec{r}_v]|} = \frac{\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{r}_{uu}}{|[\vec{r}_u,\ \vec{r}_v]|} = \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_n \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$M = \vec{m} \cdot \vec{r}_{uv} = \frac{[\vec{r}_u,\ \vec{r}_v]\vec{r}_{uv}}{|[\vec{r}_u,\ \vec{r}_v]|} = \frac{\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{r}_{uv}}{|[\vec{r}_u,\ \vec{r}_v]|} = \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_n \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$N = \vec{m} \cdot \vec{r}_{vv} = \frac{[\vec{r}_u,\ \vec{r}_v]\vec{r}_{vv}}{|[\vec{r}_u,\ \vec{r}_v]|} = \frac{\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{r}_{vv}}{|[\vec{r}_u,\ \vec{r}_v]|} = \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_n \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Если поверхность S задана явно уравнением $z = F(x, y)$, то можно перейти к параметрическому её заданию $x=u$, $y=v$, $z=F(x, y)$ и, подставив эти значения в полученные формулы, получить следующие выражения:

$$L = \frac{F_{xx}}{\sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2}}; \quad M = \frac{F_{xy}}{\sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2}}; \quad N = \frac{F_{yy}}{\sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2}} .$$

Задача 4.1. Найти 2-ую квадратичную форму прямого геликоида S: $x = u \cdot \cos v,\ y = u \cdot \sin v,\ z = a \cdot v \quad (u\ \in (-\infty, \infty),\ \ a > 0)$.

Нормальной кривизной линии l в точке K на поверхности называется численное значение проекции вектора кривизны $k\vec{n}$ линии l в точке K на единичный вектор $\vec{m}$ нормали к поверхности в точке K:

$$k_n = (k\vec{n}) \cdot \vec{m} = k \cdot (\vec{n} \cdot \vec{m}) = k \cdot |\vec{n}| \cdot |\vec{m}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{m},\ \vec{n}}\right) = k \cdot \cos\theta\ .$$

Выводится формула, по которой вычисляется нормальная кривизна линии l в точке K на поверхности, Для этого используются 2-ая и 1-ая квадратичные формы поверхности:

$$k_n = k \cdot \cos\theta = \frac{(II)}{(I)} = \frac{Ldu^2 + 2mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\ .$$

Задача 4.3. Вычислить нормальную кривизну геликоида $S\!: x = u \cdot \cos v,\ \ y = u \cdot \sin v,\ z = av\ (u\ \in (-\infty\ , \infty\ ),\ v\ \in (\ -\infty, \infty),\ a > 0)$ в точке $u_0 = \ -\pi,\ \ u_0 = \frac{\pi}{2}$ в направлении, определяемом уравнением: $u + 2v = 0$.

Направление *du*:*dv* в точке поверхности называется *главным*, если нормальная кривизна поверхности в этом направлении достигает экстремума (максимума или минимума).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.4. (Л.Эйлер). В каждой точке поверхности существуют две перпендикулярные касательные прямые l_1 и l_2, в направлении которых нормальная кривизна поверхности принимает наибольшее и наименьшее значение k_1 и k_2. Если l – произвольная касательная прямая, образующая угол θ с прямой l_1, то нормальная кривизна в направлении l вычисляется по формуле Эйлера:

$$k_n = \ k_1 \cos^2\theta + \ k_2 \sin^2\theta\ .$$

Задача 4.5. Найти главные направления и главные кривизны в каждой точке прямого геликоида.

Внутренняя геометрия поверхности. Пусть даны две поверхности S_1 и S_2.

Определение 4.7. Взаимно однозначное (биективное) непрерывное отображение $i\!: S_1 \to S_2$ называется *изгибанием*, если длина каждой линии γ_1 на поверхности S_1 равна длине её образа $\gamma_2 = i\ (\gamma_1)$ на поверхности S_2.

О свойствах поверхностей и фигур на них, которые не меняются при изгибаниях, говорят, что они относятся к *внутренней геометрии поверхности*. С этой точки зрения планиметрия представляет собой внутреннюю геометрию плоскости. В этом случае изгибаниями являются наложения одной плоскости на другую.

Можно доказать, что к внутренней геометрии поверхности относятся те свойства и величины поверхности, которые могут быть охарактеризованы или вычислены в терминах первой квадратичной формы поверхности. Это, как мы уже знаем, длины кривых, углы между кривыми и площади фигур на поверхности.

К.-Ф. Гаусс получил замечательную формулу, которая выражает полную (гауссову) кривизну поверхности только через коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности и их частные производные первого и второго порядка. Вот эта формула называется формулой Гаусса:

$$K(u,v) = \frac{1}{(EG-F^2)}\cdot\left\{\begin{vmatrix} F_{uv}-\frac{1}{2}(E_{vv}+G_{uu}) & \frac{E_u}{2} & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}\right\}.$$

Из этой формулы вытекает одна из самых важных теорем поверхностей:

Теорема 4.9. (К.– Ф. Гаусс: *Theorema Egregium*). Если одна гладкая поверхность получается из другой при помощи изгибания, то полные (гауссовы) кривизны этих поверхностей в соответственных точках совпадают. Другими словами, гауссова кривизна поверхности не меняется при изгибании.

Итак, полная (гауссова) кривизна поверхности также относится к её внутренней геометрии. В противоположность гауссовой кривизне, средняя кривизна обычно не сохраняется при изгибании и потому к внутренней геометрии не относится.

Заключение

Подводя итог проведенному исследованию, можно заключить, что аналитическая теория поверхностей основана на двух квадратичных формах, из которых 1-ая квадратичная форма представляет собой квадрат линейного элемента поверхности, а 2-ая квадратичная форма характеризует форму поверхности (характер её искривлённости) в пространстве трёх измерений. Ограничиваясь лишь одной 1-ой квадратичной формой, трактуя поверхность как пленку абсолютно гибкую, но не растяжимую, можно изучать так называемую *внутреннюю геометрию поверхности* независимо от её формы в пространстве, находить длины линий на ней, углы между линиями, вычислить площади участков поверхности, находить кривизны и геодезические линии на поверхности и решать другие разнообразные задачи подобного рода.

Решение ряда таких конкретных задач проделано в работе; причём, решение двух типов – «в ручную» и с использованием современных средств компьютерной математики.

Список использованных источников

1. Гаусс, К-Ф. Общие исследования о кривых поверхностях./К – Ф. Гаусс. Пер. с нем. В сб. «Обоснованиях геометрии». Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идеи. М.: ГИТТЛ, 1956. 528 с.
2. Риман, Б. О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии / Б. Риман. Пер. с нем. 1854.
3. Гильберт, Д. Наглядная геометрия/ Д. Гильберт , С. Кон –Фоссен С . Пер. с нем. М. – Л.: ГИТТЛ, 1951. 352 с.
4. Гарднер, М. Теория относительности для миллионов / М. Гардер. Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1966. 192 с.
5. Игошин, В. И. Десять лекций по геометрии./ В. И. Игошин. Саратов: Изд. Центр «Наука», 2010. 176 с
6. Игошин, В.И. Основания геометрии/ В. И. Игошин. Саратов: Изд. Центр «Наука», 2004. 84 с.
7. Александров, А. Д. Геометрия/ А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев. М.: Наука, 1990. Спб. БХВ-Петербург, 2010. 220 с.
8. Атанасян, Л. С. Геометрия/ Л. С. Атанасян, . В. Т. Базылев. М.: Просвещение, 1987. 420 с.
9. Мищенко, А. С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии/ А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. М.: Физматлит, 2004. 654 с.
10. Феденко, А. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии/ А. С. Феденко, Ю. П. Соловьев. Минск, 1982. 230 с.
11. Атанасян, А. С. Сб задач по геометрии/ А. С. Атанасян, Н. В. Шевелева, В. Г. Покровский. М. Эксмо, 2008. 437 с.
12. Норден, А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии/ А. П. Норден. М.: 1958. 178 с.
13. Франгулов, С. А. и др. Сборник задач по геометрии/ С. А. Франгулов. М.: Просвещение, 2002. 243 с.

14. Шаров, Г. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии/ Г. С. Шаров. М.:МЦНМО, 2005. 630 с.
15. Мищенко, А. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии/А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, Ю. П. Соловьёв. М.: Физматлит, 2004. 346 с.
16. Дубровин, Б. А. Современная геометрия. Методы теории гомологий/ Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. М.: Наука, 1984. 344с.
17. Прасолов, В. В. Элементы теории геометрий/ В. В. Прасолов. М.: МЦН – МО, 2006. 448с.
18. Виро, О. Я. Элементарная топология/ О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов. М.: МЦНМО, 2012. 446с.
19. Хирш, М. Дифференциальная топология/ М. Хирш. М.: Мир, 1979. 280с.
20. Веблен, О. Основания дифференциальной геометрии/ О. Веблен, Дж. Уайтхед. Пер. М. Г. Фрейдиной. М.: ИЛ, 1949. 230с.