

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Точные решения уравнения Лёвнера

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Матершева Игоря Владимировича

Научный руководитель

к.ф.м.н., доцент

А.М. Захаров

Зав. кафедрой

д.ф.м.н., профессор

Д. В. Прохоров

Саратов 2017

Введение

Основными задачами моей магистерской работы являются исследование хордового вида уравнения Лёвнера и особенности отображений, удовлетворяющих этому уравнению. Также моей целью было нахождение универсального способа визуализации отображений, соответствующих различным примерам управляющих функций. В качестве материалов исследования были рассмотрены статьи зарубежных научных журналов, а так же результаты работ сотрудников кафедры математического анализа.

В первой главе данной работы рассмотрены базовые понятия и определения, касающиеся самого уравнения Лёвнера, показаны некоторые примеры использования уравнения, а также вывод хордового варианта уравнения. Во второй главе по пунктам рассмотрены некоторые различные варианты управляющих функций уравнения Лёвнера и описано поведение кривой особенностей (или кривой сингулярности) в зависимости от типа управляющей функции. В третьей главе описывается способ, с помощью которого можно построить разрез на полуплоскости по заданной управляющей функции. Этот способ используется в создании алгоритма, благодаря которому стало возможным визуализировать это построение. Большая часть изображений в этой работе построена именно с помощью программы, описанной в последней главе.

Значимость моей магистерской работы заключается в алгоритме, благодаря которому появилась возможность быстро достаточно точно получить графическое подтверждение уже полученных или новых результатов, касающихся видов управляющих функций уравнения Лёвнера и полученных таким образом решений.

1. Основное содержание работы

Основной объект, с которым мы работаем в данной работе – это уравнение Лёвнера. Это уравнение широко изучалось чешским математиком Чарльзом Лёвнером. Существует довольно много версий дифференциального уравнения Лёвнера, зависящих от интересующей нас области. Например, существуют версии на круге, верхней полуплоскости, различные кольцевые области и другие, еще более разнообразные. Основное внимание уделено хордовому уравнению Лёвнера, которое является уравнением Лёвнера в верхней полуплоскости. Однако в некоторых контекстах может оказаться полезным использование радиального уравнения Лёвнера в круге. Рассмотрим оба случая.

Как было сказано выше, радиальное уравнение Лёвнера генерирует функцию, которая переводит подмножество окружности на всю окружность. Уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t, z) = -g(t, z) \frac{g(t, z) + \lambda(t)}{g(t, z) - \lambda(t)}, g(0, z) = z, \quad (1.1)$$

где $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная функция от t и $z \in \{z : |z| < 1\}$. В данной работе мы больше не будем затрагивать этот вариант уравнения.

Если же рассматривать хордовое уравнение Лёвнера, то это случай также можно рассматривать в двух вариантах относительно течения времени:

- В прямом направлении;
- В обратном направлении времени.

Прямая версия хордового уравнения Лёвнера представляет собой диф-

дифференциальное уравнение, имеющее вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t, z) = \frac{2}{g(t, z) - \lambda(t)}, g(0, z) = z, \quad (1.2)$$

Где $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, а область для z является верхней полуплоскостью, обозначаемой $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$. Из теоремы существования и единственности решения дифференциальных уравнений следует, что каждому $z \in \mathbb{H}$ соответствует некоторый промежуток времени $[0, t_0)$ такой, что существует единственное решение (1.2).

Теперь посмотрим на уравнение с точки зрения геометрии. Пусть z_0 - такая точка, что знаменатель правой части (1.2) равен нулю, т.е. $g(t, z_0) = \lambda(t)$. В результате производная, $\partial_t g(t, z)$, испытывает сингулярность в этой точке. Следовательно, мы можем заключить, что z_0 не входит в нашу область. При определенных условиях на λ (которые мы рассмотрим позже) мы можем гарантировать, что множество всех таких точек порождает кривую, берущую своё начало на вещественной оси. Однако кривая может даже быть некоторой областью, в зависимости от функции λ . Будем обозначать эту кривую γ . Чтобы выразить её в виде формулы, положим $T_z = \sup\{t_0 \in [0, T] : g(t, z) \text{ существует на } [0, t_0)\}$. Это дает нам наибольшее возможное значение t такое, при котором решение $g(t, z)$ имеет смысл. Определим теперь $G_t = \{z \in \mathbb{H} : t < T_z\}$, где содержатся только те точки из \mathbb{H} , которые в течение некоторого времени $t < T_z$ делают точки $\partial_t g$ сингулярными. Теперь G_t - наша область для (1.2). На самом деле G_t фактически является односвязной подобластью в \mathbb{H} , независимо от λ . Так как λ непрерывно порождает новое отображение G_t для каждого последующего значения t , то γ также непрерывна по t . Мы можем далее определить $\gamma(t)$ как кривую в $\mathbb{H} \cup 0$, где $\gamma(0) = 0$ и $t \in [0, T]$. В общем случае мы можем рассматривать γ как кривую сингулярности или кривую особенностей. Интересно отметить, что, поскольку λ вещественно, каждая

точка $z \in \gamma$ соответствует вещественнозначной g , поэтому γ отображается на вещественную ось. Схематично этот процесс изображен на рисунке 1.

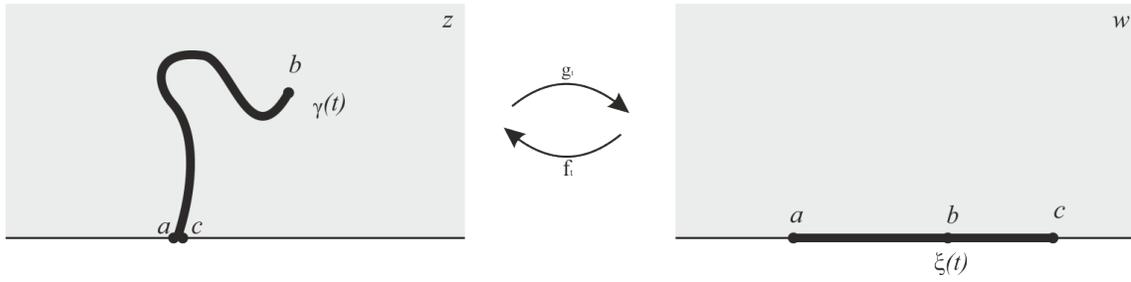


Рис. 1: Вертикальная линия после отображения становится горизонтальной линией на вещественной оси.

Поскольку в уравнение (1.2) мы подставляем разные управляющие функции λ , то мы будем говорить, что λ порождает $g(t, z)$ и соответствует области G_z . Кроме того, λ часто называют функцией управления. По мере написания данной работы будут использоваться обозначения как $g_t(z)$, так и $g(t, z)$, что само по себе одно и то же. g_t - это конформное отображение из G_z в \mathbb{H} . Это отображение можно сделать уникальным, задав определенные условия для точек в нашей области. Мы выразим это в трех условиях, с помощью которых мы можем сделать отображение уникальным. Выразим эти условия следующим образом:

1. ∞ отображается на ∞ ;
2. вещественная прямая отображается на вещественную прямую;
3. производная, вычисленная в точке ∞ , равняется 1.

Такой набор условий иначе называется гидродинамической нормировкой и, точнее говоря, утверждает, что $\lim_{z \rightarrow \infty} g_t(z) - z = 0$, поэтому наше отображение будет выглядеть как тождественное отображение, когда z находится далеко от начала координат. Рассматривая разложение g_t , заметим,

что все коэффициенты z_n при $n \geq 2$ и константа должны быть равны нулю, аналогично коэффициент при z должен быть равен 1. Поэтому вблизи бесконечно удаленной точки g_t имеет вид:

$$g_t(z) = z + \frac{c(t)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)^2 \quad (1.3)$$

Иногда $c(t)$ называется мощностью полуплоскости и можно показать, что оно непрерывно возрастает по t . Кроме того, так как $g_0(z) = z$, то $c(0) = 0$. Выгодно параметризовать γ так, чтобы $c(t)$ была линейна по t , поэтому выберем $c(t) = 2t$.

Далее мы рассмотрим несколько известных видов управляющих функций уравнения Лёвнера, при которых уравнение (1.2) имеет решение. Как было указано ранее, мы будем рассматривать только хордовое уравнение Лёвнера, порождающее функции, отображающие комплексную полуплоскость с разрезом на комплексную полуплоскость.

Первым делом опишем самый простой случай, когда управляющая функция равна константе. В первом случае управляющая функция имеет вид

$$\xi(t) = A. \quad (1.4)$$

Этот вариант рассматривался в работе [9]. Решение уравнения относительно g даёт

$$g_t(z) = A + [(z - A)^2 + 4t]^{1/2}. \quad (1.5)$$

Обратное отображение имеет вид, весьма похожий на (1.5):

$$f_t(w) = A + [(w - A)^2 - 4t]^{1/2}. \quad (1.6)$$

В момент времени t функция g приобретает сингулярность в точке

$$z_c(t) = A + 2it^{1/2} \quad (1.7)$$

отображая функцию g_t на точку $\xi(t) = A$ в w -плоскости.

Поскольку любая достаточно гладкая функция $\xi(t)$ похожа на случай с константой, то возникает предположение, что любая кривая $\xi(t)$ создаёт линию сингулярности, которая выглядит как кривая, исходящая из действительной оси.

Теперь мы рассмотрим второй случай, когда управляющая функция линейна. В этом случае управляющая функция примет вид

$$\xi(t) = t. \quad (1.8)$$

Явное выражение для полученной траектории можно выразить следующим образом

$$2 \ln r_t - r_t \cos \phi_t = 2 \ln 2 + t - 2, r_t = \frac{2\phi_t}{\sin \phi_t}. \quad (1.9)$$

Здесь ϕ монотонно возрастает с течением времени от величины 0 до π .

С точки зрения параметра ϕ , линию сингулярности можно записать в явном виде

$$z_c(t) = 2 - 2\phi_t \cot \phi_t + 2i\phi_t. \quad (1.10)$$

Это показывает, что линия сингулярности уходит в бесконечность, при этом увеличение её мнимой части заметно замедляется.

В следующем случае управляющая функция зависит от времени как функция квадратного корня. Рассмотрим функции вида:

$$\xi(t) = C(1 - t)^\beta, \xi(t) = Ct^\beta, \beta = \frac{1}{2}. \quad (1.11)$$

Этот случай подразделяется на два варианта. В первом варианте управляющая функция имеет сингулярность при конечном значении времени и имеет место

$$\xi(t) = 2[k(1 - t)]^{1/2}, t \leq 1, k \geq 0. \quad (1.12)$$

Как будет показано далее, результат зависит от значения k . В другой ситуации, управляющая функция в случае бесконечного времени подчиняется правилу

$$\xi(t) = 2[kt]^{1/2}, k \geq 0. \quad (1.13)$$

В этом случае $z_c(t)$ является просто прямой линией, что следует из условий масштабирования. Для $k = 0$ эта линия перпендикулярна вещественной оси, однако при $k \rightarrow \infty$ этот угол становится всё меньше и меньше.

При рассмотрении управляющей функции вида (1.12) с сингулярностью при конечном времени были выявлены интересные результаты. При $k < 4$ кривая сингулярности закручивается в спираль к некоторой точке. В случае при $k > 4$ кривая сингулярности касается вещественной оси под некоторым углом. При $k = 4$ линия касается действительной оси, при $k = 4.5$ линия перпендикулярна ей.

Также стоит упомянуть о паре случаев, описанных в работах сотрудников кафедры математического анализа Саратовского Государственного университета [4] и [3]. В них рассматривались случаи, когда управляющая функция представлена в виде:

$$\lambda_t = \sqrt[N]{t}, N \in \mathbb{N}, N \geq 3. \quad (1.14)$$

$$\lambda_t = C \exp(kt) + b \quad (1.15)$$

Для этих случаев также существуют решения, которые были впервые проиллюстрированы с помощью программы, созданной на основе данных этой работы.

Одной из главной целью моей работы являлось создание программы, способной по заданной управляющей функции построить линию сингулярности. Таким образом, появляется возможность продемонстрировать поведение

линии сингулярности для различных видов управляющих функций. В некоторых работах [1] указано, что подобные работы уже выполнялись, однако построение графиков выполнялось по конкретным формулам для конкретных управляющих функций. Моя же задача заключается в том, чтобы найти универсальный алгоритм, в который можно подставлять управляющую функцию любого вида. Подобные задачи ставились в работе [11]. Фактически, управляющая функция может быть и таковой, что полученная $\gamma(t)$ может и вовсе не быть кривой. Однако для нашей задачи мы ограничим наше внимание для случаев, когда $\gamma(t)$ является только кривой.

Заключение

В данной работе было исследовано хордовое уравнение Лёвнера и изучены его свойства. Основная часть работы посвящена изучению влияния управляющих функций на решения уравнения Лёвнера. Так, были перечислены наиболее часто встречающиеся, а также наиболее интересные примеры управляющих функций. Были также рассмотрены результаты работ Саратовского Государственного университета, а именно случаи, описанные сотрудниками кафедры математического анализа Прохоровым, Захаровым и Самсоновой ([4] и [3]).

Отдельно стоит отметить алгоритм, рассмотренный в последней главе работы. С помощью изученного алгоритма была создана небольшая программа, с помощью которой можно визуализировать решения уравнения Лёвнера для многих наперёд заданных функций. Таким образом были получены ранее не существовавшие графики для управляющих функций, описанных в работах Саратовского Государственного университета [4] и [3].

Список литературы

1. *Kager W., Nienhuis B., Kadanoff L. P.* Exact solutions for Loewner evolutions // *J. Statist. Phys.* 2004. Vol. 115, № 3–4. P. 805–822.
2. *Lowner K.* Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // *I. Math. Ann.* 1923. Vol. 89, № 1–2. P. 103–121.
3. *Прохоров Д. В., Захаров А. М.* Интегрируемость частного вида уравнения Лёвнера // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2010. Т. 10, вып. 2. С. 19–23
4. *Д. В. Прохоров, К. А. Самсонова* Интегралы уравнения Лёвнера со степенной управляющей функцией // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика,* 2013, том 13, выпуск 4(2), 98–108
5. *Александров, И. А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций / *И. А. Александров*// М.:Наука, 1976.
6. *Markina I., Vasil'ev A.* Virasoro algebra and dynamics in the space of univalent functions // *Contemp. Math.* 2010. Vol. 525. P. 85–116.
7. *Marshall D., Rohde S.* The Lowner differential equation and slit mappings / *D. Marshall, S. Rohde* // *J. Amer. Math. Soc.* – 2005. – V. 18, № 4. – P. 763–778.
8. *Prokhorov, D.* Singular and tangent slit solutions to the Lowner equation / *D. Prokhorov, A. Vasil'ev* // *Analysis and Mathematical Physics. Trends in*

Mathematics / Ed. B. Gustafsson, A. Vasil'ev. – Basel: Birkhauser, 2009. – P. 451–459.

9. Introduction to stochastic Loewner Evolution [Электронный ресурс] / G.F. Lawler // Alliance Francaise Halifax, 2015 : URL: <http://www.afhalifax.ca/magazine/wp-content/sciences/Riemann/IntroSLE.pdf> (Дата обращения: 10.04.2016). Яз. англ, фр.
10. *Duncan W.* An Introduction to the Loewner Equation and SLE [Электронный ресурс]// URL: <http://users.math.msu.edu/users/duncan42/SLEIntro.pdf> (Дата обращения: 15.10.2016). Яз. англ.
11. *Kennedy T.* Numerical computations for the Schramm-Loewner Evolution //J. Statist. Phys. 137, 839-856 (2009)