Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА КОНФОРМНОГО СКЛЕИВАНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 2 курса 227 группы

направления (специальности) 02.04.01 – Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Родионовой Елены Михайловны

Научный руководитель
зав.кафедрой, д.ф.-м.наук,
профессор ______________________ Прохоров Д.В.
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.-м.наук, профессор ______________________ Прохоров Д.В.
подпись, дата

Саратов 2017

1 Введение

Впервые задача конформного склеивания была поставлена и решена М.А. Лаврентьевым, затем Л.И. Волковыский также рассмотрел задачи на конформное склеивание и успешно применил теоремы конформного склеивания к проблеме типа односвязной римановой поверхности.

Метод конформного склеивания является одним из эффективных способов решения таких задач, как краевая задача Карлемана, задача Газемана для бианалитических функций и других. Тем самым, задачи конформного склеивания актуальны на сегодняшний день, что обуславливает выбор данной темы.

Задача состоит в изучение теоретических аспектов задач конформного склеивания, а также в нахождении явного выражения конформного склеивания для заданных областей.

Настоящая работа состоит из двух основных частей: теоретической и практической.

В теоретической части рассмотрены результаты К. Бишопа [1].

Вводится понятие конформного склеивания, приводится основная теорема о конформном склеивании, дается краткий обзор теории, касающейся логарифмической ёмкости и экстремальной длины. Приводится ряд вспомогательных теорем, необходимых для доказательства теоремы 1, вводится понятие обобщенного конформного склеивания. Доказываются несколько результатов, которые гласят, что каждый гомеоморфизм является "почти"склеиванием. Доказательства основаны на теореме Кёбе для круговых областей. Также представляется новое доказательство хорошо известного факта, что квазисимметричные отображения являются конформным склеиванием.

В практической части рассмотрены ряд задач на нахождение конформного склеивания на границе области, ограниченной заданной кривой Г.

В качестве Γ взяты следующие кривые:

1. квадрат с центром в начале координат и сторонами, параллельными действительной и мнимой осям;
2. прямоугольник с центром в начале координат и сторонами, параллельными действительной и мнимой осям;
3. равносторонний треугольник с центром в начале координат;
4. круговой двуугольник;
5. эллипс с центром в начале координат.

2 Основная часть

Пусть $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ – открытый единичный круг с центром в начале координат, $\mathbb{D}^* = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\mathbb{D}}$ – внешность единичного круга. Обозначим единичную окружность через $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \partial\mathbb{D}^*$.

Пусть дана замкнутая жорданова кривая Γ, обозначим через $f : \mathbb{D} \to \Omega$ – конформное отображение $\mathbb{D}$ на область Ω, ограниченную кривой Γ, а через $g : \mathbb{D}^* \to \Omega^*$ – конформное отображение внешности единичного круга на дополнение области Ω.

Определение 2.1. Композиция $h = g^{-1} \circ f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, являющаяся гомеоморфизмом называется конформным склеиванием.

Определение 2.2. Будем говорить, что h является обобщенным конформным склеиванием на множестве $E \subset \mathbb{T}$, если существуют конформные отображения $f : \mathbb{D} \to \Omega$ и $g : \mathbb{D}^* \to \Omega^*$ на непересекающиеся области, такие что f имеет радиальный предел на E, а g имеет радиальный предел на $h(E)$ и эти пределы удовлетворяют условию $f = g \circ h$ на E.

Пусть $E \subset \mathbb{T}$, обозначим $|E|$ – мера Лебега, причем $|\mathbb{T}| = 1$, $cap(E)$ – логарифмическая емкость.

Теорема 2.1. Пусть дан некоторый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ и некоторый $\varepsilon > 0$, тогда существует множество $E \subset \mathbb{T}$, такое что $|E| + |h(E)| < \varepsilon$ и гомеоморфизм $H : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, осуществляющий конформное склеивание, такой что $h(x) = H(x)$ для любых $x \in \mathbb{E} \backslash E$.

В частности, каждый такой h является обобщенным конформным склеиванием на множестве E с мерой Лебега, близкой к 1.

Доказательство этой теоремы проводится в 2 этапа. Первый шаг состоит в следующем.

Теорема 2.2. Каждый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ является обобщенным конформным склеиванием на $\mathbb{T} \backslash F$, где $F = F_1 \cup F_2$, причем F_1 и $h(F_2)$ имеют нулевую логарифмическую емкость.

Теорема 1.2 не дает информации, если h является "логарифмически сингулярной то есть $\mathbb{T} = F_1 \cup F_2$ и F_1, $h(F_2)$ имеют нулевую ёмкость. Кроме того, другой способ показывает, что такое отображение является конформным склеиванием, хотя это не единственный путь.

Теорема 2.3. Пусть h сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности. Тогда h является конформным склеиванием на гибкой кривой тогда и только тогда, когда h является логарифмически сингулярной, т.е. существует борелевское множество E, такое что E и $h(\mathbb{T} \backslash E)$ имеют нулевую логарифмическую емкость.

Теорема 2.4. Пусть $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, который не является логарифмически сингулярным (т.е. предполагается, что для любого множества $E \subset \mathbb{T}$ нулевой емкости, $h(\mathbb{T} \backslash E)$ имеет положительную емкость), тогда существует последовательности конформных отображений $\{f_n\}$ на $\mathbb{D}$ и $\{g_n\}$ на $\mathbb{D}^*$, такие что:

(1) $f_n(0) = 0$, $g_n(\infty) = \infty$.

(2) $\Omega_n = f_n(\mathbb{D})$ и $\Omega_n^* = g_n(\mathbb{D}^*)$ являются непересекающимися жордановыми областями.

(3) Существует $R < \infty$ такое что $S^2 \backslash (\Omega_n \bigcup \Omega_n^*) \subset \{z : 1 \leq |z| \leq R\}$ независящее от n.

(4) Существует счетное множество $E \subset \mathbb{T}$, такое что $\lim\limits_{n \to \infty} |f_n(x) - g_n(h(x))| = 0$ для любого $x \in \mathbb{T} \backslash E$.

Заметим, что условия, наложенные на h в точности дополняют теорему 1.3. Объединяя эти теоремы получен результат.

Теорема 2.5. Пусть дан сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, тогда существует невырожденная последовательность конформных отображений $f_n : \mathbb{D} \to \Omega_n$ и $g_n : \mathbb{D}^* \to \Omega_n^*$ на непересекающиеся жордановы области с $f_n(0)$, $g_n(\infty) = \infty$ и такие что $|f_n(x) - g_n(h(x))| \to 0$ для любого $x \in \mathbb{T} \backslash E$, где E является счетным множеством.

Следствие 2.1. Пусть $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, такой что E имеет нулевую логарифмическую емкость тогда и только тогда, когда $h(E)$ имеет нулевую логарифмическую ёмкость. Тогда h является обобщенным конформным склеиванием на $\mathbb{T} \backslash F$, где F имеет нулевую логарифмическую емкость.

Следствие 2.2. Пусть $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм и пусть он является логарифмически регулярным (то есть $cap(F) = 0 \Rightarrow |h(F)| = |h^{-1}(F)| = 0$). Тогда h является обобщенным конформным склеиванием на множестве E, такое что E и $h(E)$ имеют полную меру Лебега.

Этот результат был предполагаем Дэвидом Гамильтоном и свойство 2.2 усиливает его результат в [18]. Рассматривается гомеоморфизм, который удовлетворяет заключению в следствии 2.2 как "почти всюду склеивающийся". Следующим шагом в доказательстве теоремы 1.1 является преобразование обобщенного конформного склеивания в действительно конформное склеивание, используя следующий результат.

Теорема 2.6. Пусть $f : \mathbb{D} \to \Omega$ и $g : \mathbb{D}^* \to \Omega^*$ – конформные отображения на непересекающиеся жордановы области и пусть $E = f^{-1}(\partial\Omega \cap \partial\Omega^*)$. На E определим $h = g^{-1} \circ f$. Тогда h может быть продолжена из E с помощью конформно склеивающего гомеоморфизма $\mathbb{T}$ на себя.

Этот результат может быть доказан с помощью явной геометрической конструкции.

Постановка задачи:

- найти функции f и g, отображающие внутренность и внешность единичного круга, с центром в начале координат, на внутренность и внешность области, ограниченной заданной кривой.

- взяв точки $e^{i\varphi}$ и $e^{i\psi}$ на единичной окружности, найти соответствие между параметрами φ и ψ на границе данной области.

Найдены следующие соответствия между параметрами на границе

1) в случае квадрата

$$\int\limits_0^{e^{i\psi}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^4+1}} = \frac{6\Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right)}{\sqrt{\pi}K\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{e^{i\frac{\pi}{4}}}^{e^{i\varphi}} \sqrt{\zeta^4+1}d\zeta + \frac{\sqrt{2}}{3}K\left(\frac{1}{2}\right). \qquad (1)$$

2) в случае прямоугольника

$$\int\limits_0^{e^{i\varphi}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^4-2\zeta^2M+1}} = \frac{F\left(i\sinh^{-1}(ie^{i\theta}), e^{-4i\theta}\right)}{F\left(i\sinh^{-1}(e^{-i\theta}), e^{4i\theta}\right)} \frac{\left|\int_{e^{i\theta}}^{-e^{-i\theta}} \sqrt{\zeta^4-2\zeta^2M+1}d\zeta\right|}{\left|\int_{e^{-i\theta}}^{e^{i\theta}} \sqrt{\zeta^4-2\zeta^2M+1}d\zeta\right|} *$$

$$* \int_{e^{i\theta}}^{e^{i\psi}} \sqrt{\zeta^4-2\zeta^2M+1}d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\left|\int_{e^{-i\theta}}^{e^{i\theta}} \sqrt{\zeta^4-2\zeta^2M+1}d\zeta\right|^2 + \left|\int_{e^{i\theta}}^{-e^{-i\theta}} \sqrt{\zeta^4-2\zeta^2M+1}d\zeta\right|^2}.$$

3) в случае треугольника

$$\int\limits_0^{e^{i\varphi}} \frac{1}{\sqrt[3]{(\zeta^3+i)^2}}d\zeta = \frac{\left|\int\limits_{e^{i\frac{\pi}{2}}}^{e^{i\frac{7\pi}{6}}} \frac{1}{\sqrt[3]{(\zeta^3+i)^2}}d\zeta\right|}{\left|\int\limits_{e^{i\frac{\pi}{2}}}^{e^{i\frac{7\pi}{6}}} \sqrt[3]{(\zeta^3+i)^2}d\zeta\right|} \int\limits_{e^{i\frac{\pi}{2}}}^{e^{i\psi}} \sqrt[3]{(\zeta^3+i)^2}d\zeta + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\int\limits_{e^{i\frac{\pi}{2}}}^{e^{i\frac{7\pi}{6}}} \sqrt[3]{(\zeta^3+i)^2}d\zeta\right|. \qquad (2)$$

4) в случае кругового двуугольника

$$\varphi = \psi, \tag{3}$$

то есть, гомеоморфизмом, осуществляющим конформное склеивание является тождественное отображение;

5) в случае эллипса

$$Re^{i\varphi} + \frac{1}{R}e^{-i\varphi} = \left(R + \frac{1}{R}\right)\cos\frac{\pi}{\widetilde{K}}\widetilde{F}(k,\theta) \pm i\left(R - \frac{1}{R}\right)\sin\frac{\pi}{\widetilde{K}}\widetilde{F}(k,\theta). \tag{4}$$

Список использованных источников

1 Bishop, C. J. Conformal welding and Koebe's theorem/C. J. Bishop//Ann. Math. 2007. V.166. P.613-656.

2 Ahlfors, L. V. Lectures on Quasiconformal Mappings/L. V. Ahlfors//D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, Ontario-New York-London, 1966.

3 Balogh, Z. Lengths of radii under conformal maps of the unit disc/Z. Balogh, M. Bonk//Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V.127. P.801–804.

4 Bishop, C. J. Constructing continuous functions holomorphic off a curve/C. J. Bishop//Funct. Anal. 1989. V.82. P.113–137.

5 Bishop, C. J. Boundary interpolation sets for conformal maps/C. J. Bishop//London Math. Soc. 2006. V.38. P.607–616.

6 Bishop, C. J. Some homeomorphisms of the sphere conformal off a curve/C. J. Bishop//Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1994. V.19. P.323–338.

7 Bishop, C. J. Harmonic measures supported on curves/C. J. Bishop, L. Carleson, J. B. Garnett, P. W. Jones//Pacific J. Math. 1989. V.138. P. 233–236.

8 Browder, A. Introduction to Function Algebras/A. Browder//W. A. Benjamin, Inc., New York- Amsterdam, 1969.

9 Browder, A. Some algebras of functions on an arc/A. Browder, J. Wermer//J. Math. Mech. 1963. V.12. P.119–130.

10 Browder, A. A method for constructing Dirichlet algebras/A. Browder//Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V.15. P.546–552.

11 Carleson, L. Representations of continuous functions/L. Carleson//Math. Z. 1957. V.66. P.447–451.

12 Carleson, L. Selected Problems on Exceptional Sets/L. Carleson//Van Nostrand. 1967.

13 Daverman, R. J. Decompositions of Manifolds/R. J. Daverman//Pure and Applied Mathematics, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986. V.124.

14 David, G. Solutions de l'ŕequation de Beltrami avec $|\mu|_\infty = 1$/G. David//Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1988. V.13. P.25–70.

15 Duren, P. A Century of Mathematics in America/P. Duren, H. M. Edwards, U. C. Merzbach//Part III, American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.

16 Fitzpatrick, B. Some aspects of the work and influence of R. L. Moore/B. Fitzpatrick//Handbook of the History of General Topology. 1997 V.1. P.41–61.

17 Gehring, F. W. An inequality in the theory of conformal mapping/F. W. Gehring, W. K. Hayman//J. Math. Pures Appl. 1962. V.41. P.353–361.

18 Hamilton, D. H. Generalized conformal welding/D. H. Hamilton//Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1991. V.16. P.333–343.

19 Hamilton, D. H. Conformal welding/D. H. Hamilton//The Handbook of Geometric Function Theory/ North Holland, 2002.

20 He, Z.-X. Fixed points, Koebe uniformization and circle packings/Z.-X. He, O. Schramm//Ann. of Math. 1993. V.137. P.369–406.

21 Kaufman, R. Fourier-Stieltjes coefficients and continuation of functions/R. Kaufman//Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1984. V.9. P.27–31.

22 Kaufman, R. Plane curves and removable sets/R. Kaufman//Pacific J. Math. 1986. V.125. P.409–413.

23 Lehto, O. Homeomorphisms with a given dilatation/O. Lehto//Proceedings of the Fifteenth Scandinavian Congress, (Oslo, 1968, 58–73, Berlin, 1970, Springer.

24 Lehto, O. On the existence of quasiconformal mappings with prescribed complex dilatation/O. Lehto, K.I. Virtanen//Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No. 1960. V.274. P.24.

25 Lehto, O. Quasiconformal Mappings in the Plane/O. Lehto, K.I. Virtanen//Springer-Verlag, New York, second edition, 1973, Translated from the German by K. W. Lucas, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 126.

26 Lundberg, K. A theorem on the boundary behavior of a uniformly convergent sequence of conformal maps on the disk:PhD thesis/K. Lundberg. USA, NY, Stony Brook, State University of New York at Stony Brook, 2005.

27 Oikawa, K. Welding of polygons and the type of Riemann surfaces/K. Oikawa//KÏodai Math. Sem. Rep. 1961. V.13. P.37–52.

28 Pfluger, A. Ueber die Konstruktion Riemannscher FlËachen durch Verheftung/A. Pfluger//J. Indian Math. Socя (N.S.). 1960. V.24. P.401–412.

29 Pommerenke, Ch. On the boundary continuity of conformal maps/Ch. Pommerenke//Pacific J. Math. 1985. V.120. P.423–430.

30 Pommerenke, Ch. Boundary Behaviour of Conformal Maps/Ch. Pommerenke//Springer-Verlag, Berlin, 1992.

31 Rudin, W. Boundary values of continuous analytic functions/W. Rudin//Proc. Amer. Math. Soc. 1956. V.7. P.808–811.

32 Sario, L. Capacity Functions/L. Sario, K. Oikawa//Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

33 Vainio, J. V. Conditions for the possibility of conformal sewing/J. V. Vainio//Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes. 1985. V.53. P.43.

34 Vainio, J. V. On the type of sewing functions with a singularity/J. V. Vainio//Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1989. V.14. P.161–167.

35 Vainio, J. V. Properties of real sewing functions/J. V. Vainio//Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1995. V.20. P. 87–95.

36 Wilder, R. L. The mathematical work of R. L. Moore: its background, nature and influence/R. L. Wilder//Arch. Hist. Exact Sci. 1982. V.26. P.73–97.

37 Williams, G. B. Approximation of quasisymmetries using circle packings/G. B. Williams//Discrete Comput. Geom. 2001. V.25. P.103–124.

38 Williams, G. B. Discrete conformal welding/G. B. Williams//Indiana Univ. Math. J. 2004. V.53. P.765–804.

39 Коппенфельс, В. Практика конформных отображений/В. Коппенфельс, Ф.Штальман ; пер. К.М. Фишмана ; под ред. Л.И.Волковыского. М. : Изд-во иностранный литературы, 1963. 406с.