Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Построение функций с ортонормированной системой сдвигов для локальных полей

название темы выпускной квалификационной работы

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 «Математика и компьютерные науки»

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета

Каймашникова Всеволода Александровича

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

зав. каф., к.ф.-м.н.		А.М. Водолазов
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой:

зав. каф., к.ф.-м.н.		А.М. Водолазов
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2017 г.

Введение Магистерская работа посвящена построению функций с ортонормированной системой сдвигов на локальных полях. Эти функции в итоге можно использовать в кратномаштабном анализе и вейвлет анализе на локальных полях.

Локальные поля тесно связаны с понятием p-адических чисел. В последние годы p-адические числа (и более общие числовые поля с неархимедовыми нормами) стали очень привлекательны для исследователей, создающих математические модели сложных иерархических систем: в физике, теории информации, криптографии, психологии, генетике, финансах. Ключевым моментом в использовании p-адических чисел для моделирования физических, биологических или социальных процессов является возможность закодировать иерархические структуры этих процессов с помощью алгебры или топологии. Поля p-адических чисел имеют древовидную структуру, которая естественным образом используется для представления иерархий. В этот же период был создан ряд новых важных теоретических разделов p-адического анализа.

Новизна данного исследования состоит в том, что приведённая тема является малоизученной.

Научная значимость велика за счёт новизны и широкого прикладного характера в обработке цифровых сигналов.

Цифровая обработка сигналов - наука о представлении сигналов в цифровом виде и методах обработки таких сигналов. Она охватывает множество предметных областей, таких, как: обработка изображений и биомедицинских данных, обработка звука и речи, обработка сигналов с сонаров, радаров и сенсоров, спектральный анализ.

В работе описан алгоритм построения функций с ортонормированной системой сдвигов и приведены примеры таких функций.

Целью работы является изучить функции с ортонормированной системой сдвигов и построить алгоритм нахождения таких функций на локальных полях.

Задачи магистерской работы:

1. Анализ основных свойств p-адических чисел и аддитивных характеров локальных полей.

2. Анализ теории кратномаштабного анализа для $\mathbb{Q}_p$ и локальных полей.

3. Построение алгоритма конструирующего функции с ортонормированной системой сдвигов.

Данная работа устроена следующим образом. В первом разделе изложены основные понятия из теории p-адических чисел. Второй раздел состоит из пояснения основных фактов из теории локальных полей. В третьем разделе приведены и проанализированы основные понятия из теории вейвлетов и теории кратномаштабного анализа для $\mathbb{Q}_p$ и локальных полей. В четвертом разделе показано, как можно находить и строить функции с ортонормированной системой сдвигов. В практической части реализован программный модуль на языке Java, который строит и решает систему уравнений для нахождения функций с ортонормированной системой сдвигов.

Основное содержание работы Через $\mathbb{Z}$ обозначим кольцо целых рациональных чисел, $\mathbb{Z} = 0, \pm 1, \pm 2, ...$; через $\mathbb{Z}_+$ - множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = 1, 2, ...$ Пусть $\mathbb{Q}$ - поле рациональных чисел. Абсолютное значение $|x|$ любого $x \in \mathbb{Q}$ удовлетворяет следующим характерным свойствам:

а) $|x| \geq 0$, причём $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$,

б) $|xy| = |x||y|, x, y \in \mathbb{Q}$,

в) $|x + y| \leq |x| + |y|, x, y \in \mathbb{Q}$.

Любая функция со свойствами 1-3 называется нормой. Пусть теперь - простое число, $p = 2, 3, 5, ..., 137, ...$ В поле $\mathbb{Q}$ введем другую норму $|x|$ по правилу

$$|0|_p = 0, |x|_p = p^{-\gamma(x)},$$

где целое число $\gamma(x)$ определяется из представления

$$x = p^{\gamma}\frac{m}{n},\ m,\ n,\ \gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$$

и целые числа m и n не делятся на p. Норма $|x|_p$ называется p-адической нормой. Норма $|x|_p$ обладает характерными свойствами 1-3 нормы даже в более сильной форме, а именно,

а) $|x|_p \geq 0$, причём $|x|_p = 0 \leftrightarrow x = 0$,

б) $|xy|_p = |x|_p|y|_p, \in Q$,

в) $|x + y|_p \leq max(|x|_p, |y|_p), \ \in Q$.

В случае, когда $|x|_p \neq |y|_p$, мы имеем равенство

3') $|x+y|_p = max(|x|_p, |y|_p)$

При $p = 2$ мы также имеем

3") $|x+y|_2 \leq \frac{1}{2}|x|_p$, если $|x|_2 = |y|_2$.

Пополнение поля $\mathbb{Q}$ по p-адической норме образует поле $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел (характеристики 0). Поле $\mathbb{Q}_p$ аналогично полю $\mathbb{R} = \mathbb{Q}_{\text{inf}}$ вещественных чисел, получаемых пополнением $\mathbb{Q}$ по норме $|x| = |x|_{\text{inf}}$.

Любое p-адическое число $x \neq 0$ однозначно представляется в каноноческом виде

$$x = p^{\gamma}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots)$$

Аддитивным характером поля $\mathbb{Q}_p$ называется характер аддитивной группы $\mathbb{Q}_p$, т.е. непрерывная (комплекснозначная) функция $\chi(x)$, заданная на $\mathbb{Q}_p$ и удовлетворяющая условиям

$$|\chi(x)| = 1,\ \chi(x+y) = \chi(x)\chi(y),\ x, y \in \mathbb{Q}_p \qquad (1.1)$$

Рассмотрим построение ортогональной системы сдвигов, а также как строится система уравнений для её нахождения.

Пусть p - простое, G - локально компактная нуль-мерная группа с основной цепочкой подгрупп $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (G_n/G_{n+1})^{\#} = p$, базисной последовательностью $g_n \in G_n\ G_{n+1}$. Последнее означает, что любой элемент $x \in G$ однозначно представим в виде суммы ряда

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n g_n, \quad x_n = \overline{0, p-1},$$

в котором количество слагаемых с отрицательными номерами конечно. Отображение

$$\lambda(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n p^n, \quad x_n = \overline{0, p-1}$$

переводит группу G в полупрямую $[0, +\infty)$. Его называют отображением Монна. Пусть (g_n) удовлетворяют условиям $pg_n = g_{n+1}$. Группа с таким условием называется группой p-адических чисел. Она есть аддитивная группа поля $\mathbb{Q}_p$ всех p-адических чисел, т.е. $G = \mathbb{Q}_p^+$. Конкретной реализацией такой группы является совокупность бесконечных в обе стороны последовательностей $x = (\cdots, 0, x_k, x_{k+1}, \cdots)$, $\quad k \in \mathbb{Z}$, $\quad x_l = 0$ при $l < k$ и $x_l = \overline{0, p-1}$. Операция сложения в такой группе определяется покоординатно по модулю p с переносом единицы, возникающей при переполнении, в следующий разряд направо. Основная цепочка в этом случае состоит из подгрупп

$$G_n = \{x = (\dots, 0, x_n, x_{n+1}, \dots) : x_l = \overline{0, p-1}\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В качестве g_n удобно выбирать элементы $g_n = (\dots, 0, 1_n, 0_{n+1}, \dots)$. Обозначим

$$H_0 = \{h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-1}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{-s}g_{-s} : s \in \mathbb{N}\},$$

$$H_0^{(N)} = \{h = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-1}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{-N}g_{-N}\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Множество H_0 есть множество сдвигов, так как при отображении Монна оно переходит в множество целых неотрицательных чисел.

Через X будем обозначать множество характеров группы G, через $G_n^\perp$ - аннуляторы подгрупп G_n. Совокупность аннуляторов $(G_n^\perp)_{n \in \mathbb{Z}}$ образуют возрастающую последовательность:

$$G_n^\perp \subset G_{n+1}^\perp, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} G_n^\perp = 1, \quad (G_n^\perp / G_{n+1}^\perp)^\# = p, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} G_n^\perp = X$$

Множество X характеров локального поля положительной характеристики образует абелеву группу с операцией произведения характеров

$$(\chi * \varphi)(a) = \chi(a) \cdot \varphi(a).$$

Обратный элемент определяется как $\chi^{-1}(a) = \overline{\chi(a)}$, а единичным элементом является характер $e(a) \equiv 1$.

Определим характеры r_n поля $F^{(s)}$ следующим образом. Если

$$a = (\dots, 0_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots), \quad a_j \in GF(p^s),$$

и

$$a_j = (a_j^{(0)}, a_j^{(1)}, \ldots, a_j^{(s-1)}), \quad a_j^{(\nu)} \in GF(p),$$

то $r_n(a) = e^{\frac{2\pi i}{p} a_k^(l)}$, где $n = ks + l$ и $0 \le l < s$. Любой характер $\chi \in X$ однозначно представим в виде произведения [16, 17]

$$\chi = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} r_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_n = \overline{0, p-1},$$

в котором множителей с положительными номерами конечное число.
Запишем характер χ в виде

$$\chi = \prod_{k \in \mathbb{Z}} r_{ks+0}^{\alpha_k^{(0)}} \cdot r_{ks+1}^{\alpha_k^{(1)}} \cdot \ldots \cdot r_{ks+s-1}^{\alpha_k^{(s-1)}}$$

и обозначим

$$r_k^{\alpha_k} = r_{ks+0}^{\alpha_k^{(0)}} \cdot r_{ks+1}^{\alpha_k^{(1)}} \cdot \ldots \cdot r_{ks+s-1}^{\alpha_k^{(s-1)}}$$

где $a_k = (a_k^{(0)}, a_k^{(1)}, \ldots, a_k^{(s-1)} \in GF(p^s))$. Функции $r_k^{\alpha_k}$ назовем функциями Радемахера. Положим по определению

$$(r_k^{\alpha_k})^{\beta_k} = r_k^{\alpha_k \beta_k}, \quad \alpha_k, \beta_k \in GF(p^s).$$

В этом случае

$$r_k^{\alpha_k} = (r_k^{(1,0,\cdots,0)})^{\alpha_k} = r_k^{(\alpha_k^{(0)}, \alpha_k^{(1)}, \cdots, \alpha_k^{(s-1)})} = r_{ks+0}^{\alpha_k^{(0)}} r_{ks+1}^{\alpha_k^{(1)}} \cdots r_{ks+s-1}^{\alpha_k^{(s-1)}},$$

Поэтому χ можно представить в виде произведения

$$\chi = \prod_{k \in \mathbb{Z}} r_k^{\alpha_k}.$$

Определим возведение характера в степень $\beta \in GF(p^s)$ равенством

$$\chi^\beta = (\prod r_k^{\alpha_k})^\beta = \prod r_k^{\alpha_k \beta}.$$

а) Справедливо равенство
$$r_k^{u\dot{+}v} = r_k^u r_k^v$$

б) Множество характеров поля $F(s)$ - линейное пространство $(X, *, \Delta^{GF(p^s)})$ над конечным полем $GF(p^s)$ с произведением в качестве внутренней операции и возведением в степень $a \in GF(p^s)$ в качестве внешней;

в) Если a_k, $u \in GF(p^s)$, то
$$(r_k^{\alpha_k}, ug_k) = \prod_{l=0}^{s-1} e^{\frac{2\pi i}{p} a_k^{(l)} u^{(l)}};$$

г) Если $k \neq j$, то $(r_k^{\alpha_k}, u_{g_j}) = 1$.

При каждом $k \in \mathbb{Z}$ выбираем характеры $r_k \in (G_{k+1}^{\perp} \ G_k^{\perp})$ и фиксируем их. Характеры r_k это функции Радемахера. Любой характер $\chi \in X$ однозначно представим в виде произведения:
$$\chi = \prod_{k\in\mathbb{Z}} r_k^{\alpha_k} = \prod_{k=-\infty}^{m} r_k^{\alpha_k}, \quad \alpha_k = \overline{0, p-1},$$
в котором лишь конечное число показателей α_k с положительными номерами отлично от нуля.

Лемма 1 Для любой локально-компактной нуль-мерной группы

а) $\int\limits_{G_0^{\perp}} (\chi, x) d\nu(\chi) = 1_{G_0}(x)$

б) $\int\limits_{G_0} (\chi, x) d\mu(\chi) = 1_{G_0}(\chi)$

Лемма 2 Для любой локально-компактной нуль-мерной группы и для любого $n \in \mathbb{Z}$

а) $\int\limits_{G_n^{\perp}} (\chi, x) d\nu(\chi) = p^n 1_{G_n}(x)$

б) $\int\limits_{G_n} (\chi, x) d\mu(\chi) = \frac{1}{p^n} 1_{G_n^{\perp}}(\chi)$

Лемма 3 Пусть G - локально-компактная нуль-мерная группа и $\chi_{n,s} = r_n^{\alpha_n} r_{n+1}^{\alpha_n+1} \dots r_{n+s}^{\alpha_n+s}$ характер, не принадлежащий $G_n^\perp$. Тогда

$$\int\limits_{G_n^\perp \chi_{n,s}} (\chi, x) d\nu(\chi) = p^n (\chi_{n,s}, x) 1_{G_n}(x).$$

Теперь рассмотрим следующую теорему.

Теорема 1 Пусть $M, N \in \mathbb{N}$, $G = \mathbb{Q}_p^+$, $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$. Система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0^{(N)}}$ - будет ортонормированной тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\alpha_N, \cdots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \cdots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 (r_{-N}^{\alpha_{-N}} \cdots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, b_{M-1} g_{M-1} \dot{+} \cdots \dot{+} b_{-N} g_{-N}) =$$

$$= \begin{cases} p^N, & \text{если все } b_j = 0, \\ 0, & \text{если } b_{M-1} = \cdots = b_0 = p-1 \text{ и } b_{-1}^2 + \cdots + b_{-N}^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } b_{M-1} = \cdots = b_0 = 0 \text{ и } b_{-1}^2 + \cdots + b_{-N}^2 \neq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Теорема 2 Пусть $M = 1$, $p = 2$, $N \in \mathbb{N}$, $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-N}(G_1^\perp)$ и $|\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp)| = 1$. Если система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ есть ортонормированная система, то $\hat{\varphi}(G_1^\perp \ G_0^\perp) = 0$.

Лемма 4 Любое решение $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ системы (4.2), у которого все координаты $\alpha_i \geq 0$ можно найти как линейную комбинацию:

$$\overline{a} = (\overline{a}' + m(\overline{a}')\overline{\alpha_0}) \frac{n}{nm(\overline{a}') + \sum_{i=1}^n \alpha_j'} \tag{4.3}$$

где константа $m(\overline{\alpha}')$ определена равенством

$$m(\overline{\alpha}') = \begin{cases} min\{\alpha_i'\}, & \text{если существует } \alpha_i' < 0, \\ 0, & \text{если все } \alpha_i' \geq 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

$\overline{\alpha_0} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ и $\overline{\alpha}'$ - произвольное решение системы (4.2), отличное от $-m(\overline{\alpha}')\overline{\alpha_0}$.

Лемма 5 Если $\overline{\alpha_0}, \overline{\alpha_1}', \ldots, \overline{\alpha_r}'$ - фундаментальная система решений системы (4.2), то соответствующие решения $\overline{\alpha_0}, \overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_r}$ системы (4.1) являются линейно независимыми.

Построение системы уравнений и её решение для φ

Если рассмотреть сумму 1.1 из теоремы 1 и переписать её через аддитивные характеры получается следующая система:

$$\sum_{t=0}^{p^{N+M}-1} |\alpha_t|^2 \chi_p^t(x) = 0,$$

где $\chi_p(x) = e^{\frac{2\pi i x}{p^N}}$. Значение x принимает значение в $1, 2, \ldots p^N - 1$.

Таким образом мы получаем следующую систему из $p^N - 1$ уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1\chi_p(1) + a_2\chi_p^2(1) + \cdots + a_{p^{N+M}-1}\chi_p^{p^{N+M}-1}(1) = 0, \\ a_0 + a_1\chi_p(2) + a_2\chi_p^2(2) + \cdots + a_{p^{N+M}-1}\chi_p^{p^{N+M}-1}(2) = 0, \\ \ldots \\ a_0 + a_1\chi_p(p^N-1) + a_2\chi_p^2(p^N-1) + \cdots + a_{p^{N+M}-1}\chi_p^{p^{N+M}-1}(p^N-1) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $a = |\alpha_t|^2$ и $\chi_p(x) = e^{\frac{2\pi i x}{p^N}}$

Решив эту систему и найдя α_t, функция φ представляется в следующем виде

$$\varphi(x) = \sum_{t=0}^{p^{N+M}-1} \alpha_t \chi_p^t(x) = 0$$

.

В магистерской работе описано, как можно решить эту систему по заданным параметрам p, N, M и находить функции φ свдиги которой образуют ортонормированную систему.

Рассмотрим несколько конкретных примеров, меняя параметры p, N, M. Для навигации можно пользоваться таблицей 1.

Таблица 1.

	p	N	M
1	2	1	1
2	2	1	2
3	2	1	3
4	2	2	1
5	2	2	2
6	3	1	1
7	5	1	1

Пример 1. $p = 2$, $n = 1$, $m = 1$.
В этом примере система вырождается в одно уравнение, убрав из неё нулевые элементы получаем:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$$

И её решение выглядит так:

$$a_0 = a_1 - a_2 + a_3$$

a_1, a_2, a_3 - свободные.
Пример 2. $p = 2$, $n = 1$, $m = 2$.
В этом примере система вырождается в одно уравнение, убрав из неё нулевые элементы получаем:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 = 0$$

И её решение выглядит так:

$$a_0 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7$$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ - свободные.
Пример 3. $p = 2$, $n = 1$, $m = 3$.
В этом примере система вырождается в одно уравнение, убрав из неё нулевые

элементы получаем:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11} + a_{12} - a_{13} + a_{14} - a_{15} = 0$$

И её решение выглядит так:

$$a_0 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{10} + a_{11} - a_{12} + a_{13} - a_{14} + a_{15}$$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$ - свободные.

Пример 4. $p = 2$, $n = 2$, $m = 1$.

Тогда имеем следующую систему, убрав из неё нулевые элементы:

$$\begin{cases} a_0 - a_2 + a_4 - a_6 = 0 \\ a_1 - a_3 + a_5 - a_7 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 = 0 \\ a_0 - a_2 + a_4 - a_6 = 0 \\ -a_1 + a_3 - a_5 + a_7 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

И её решение выглядит так:

$$\begin{cases} a_0 = a_3 - a_4 + a_7 \\ a_1 = a_3 - a_5 + a_7 \\ a_2 = a_3 - a_6 + a_7 \end{cases}$$

a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 - свободные.

Пример 5. $p = 2$, $n = 2$, $m = 2$.

Тогда имеем следующую систему, убрав из неё нулевые элементы:

$$\begin{cases} a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + a_8 - a_{10} + a_{12} - a_{14} = 0 \\ a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9 - a_{11} + a_{13} - a_{15} = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + \\ + a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11} + a_{12} - a_{13} + a_{14} - a_{15} = 0 \\ a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + a_8 - a_{10} + a_{12} - a_{14} = 0 \\ -a_1 + a_3 - a_5 + a_7 - a_9 + a_{11} - a_{13} + a_{15} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

И её решение выглядит так:

$$\begin{cases} a_0 = a_3 - a_4 + a_7 - a_8 + a_{11} - a_{12} + a_{15} \\ a_1 = a_3 - a_5 + a_7 - a_9 + a_{11} - a_{13} + a_{15} \\ a_2 = a_3 - a_6 + a_7 - a_{10} + a_{11} - a_{14} + a_{15} \end{cases}$$

$a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$ - свободные.

Пример 6. $p = 3$, $n = 1$, $m = 1$.
Тогда имеем следующую систему, убрав из неё нулевые элементы:

$$\begin{cases} a_0 - 0.5a_1 - 0.5a_2 + a_3 - 0.5a_4 - 0.5a_5 + a_6 - 0.5a_7 - 0.5a_8 = 0 \\ 0.87a_1 - 0.87a_2 + 0.87a_4 - 0.87a_5 + 0.87a_7 - 0.87a_8 = 0 \\ a_0 - 0.5a_1 - 0.5a_2 + a_3 - 0.5a_4 - 0.5a_5 + a_6 - 0.5a_7 - 0.5a_8 = 0 \\ -0.87a_1 + 0.87a_2 - 0.87a_4 + 0.87a_5 - 0.87a_7 + 0.87a_8 = 0 \end{cases} \tag{14}$$

И её решение выглядит так:

$$\begin{cases} a_0 = a_2 - a_3 + a_5 - a_6 + a_8 \\ a_1 = a_2 - a_4 + a_5 - a_7 + a_8 \end{cases}$$

$a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ - свободные.

Пример 7. $p = 5$, $n = 1$, $m = 1$.

Тогда имеем следующую систему, убрав из неё нулевые элементы. Также мы убрали дубликаты уравнений в системе.

$$\begin{cases} a_0 + 0.31a_1 - 0.81a_2 - 0.81a_3 + 0.31a_4 + a_5 + 0.31a_6 - 0.81a_7 - 0.81a_8 + \\ +0.31a_9 + a_{10} + 0.31a_{11} - 0.81a_{12} - 0.81a_{13} + 0.31a_{14} + a_{15} + 0.31a_{16} - \\ -0.81a_{17} - 0.81a_{18} + 0.31a_{19} + a_{20} + 0.31a_{21} - 0.81a_{22} - 0.81a_{23} + 0.31a_{24} = 0 \\ 0.95a_1 + 0.59a_2 - 0.59a_3 - 0.95a_4 + 0.95a_6 + 0.59a_7 - 0.59a_8 - 0.95a_9 + \\ +0.95a_{11} + 0.59a_{12} - 0.59a_{13} - 0.95a_{14} - 0.00a_{15} + 0.95a_{16} + 0.59a_{17} - \\ -0.59a_{18} - 0.95a_{19} + 0.95a_{21} + 0.59a_{22} - 0.59a_{23} - 0.95a_{24} = 0 \\ a_0 - 0.81a_1 + 0.31a_2 + 0.31a_3 - 0.81a_4 + a_5 - 0.81a_6 + 0.31a_7 + 0.31a_8 - \\ -0.81a_9 + a_{10} - 0.81a_{11} + 0.31a_{12} + 0.31a_{13} - 0.81a_{14} + a_{15} - 0.81a_{16} + \\ +0.31a_{17} + 0.31a_{18} - 0.81a_{19} + a_{20} - 0.81a_{21} + 0.31a_{22} + 0.31a_{23} - 0.81a_{24} = 0 \\ 0.59a_1 - 0.95a_2 + 0.95a_3 - 0.59a_4 + 0.59a_6 - 0.95a_7 + 0.95a_8 - 0.59a_9 + \\ +0.59a_{11} - 0.95a_{12} + 0.95a_{13} - 0.59a_{14} - 0.00a_{15} + 0.59a_{16} - 0.95a_{17} + \\ +0.95a_{18} - 0.59a_{19} + 0.59a_{21} - 0.95a_{22} + 0.95a_{23} - 0.59a_{24} = 0 \\ -0.59a_1 + 0.95a_2 - 0.95a_3 + 0.59a_4 - 0.59a_6 + 0.95a_7 - 0.95a_8 + \\ +0.59a_9 - 0.59a_{11} + 0.95a_{12} - 0.95a_{13} + 0.59a_{14} - 0.00a_{15} - 0.59a_{16} + \\ +0.95a_{17} - 0.95a_{18} + 0.59a_{19} - 0.59a_{21} + 0.95a_{22} - 0.95a_{23} + 0.59a_{24} = 0 \\ -0.95a_1 - 0.59a_2 + 0.59a_3 + 0.95a_4 - 0.95a_6 - 0.59a_7 + 0.59a_8 + 0.95a_9 - \\ -0.95a_{11} - 0.59a_{12} + 0.59a_{13} + 0.95a_{14} - 0.00a_{15} - 0.95a_{16} - 0.59a_{17} + \\ +0.59a_{18} + 0.95a_{19} - 0.95a_{21} - 0.59a_{22} + 0.59a_{23} + 0.95a_{24} = 0 \end{cases} \tag{15}$$

И её решение выглядит так:

$$\begin{cases} a_0 = a_4 - a_5 + a_9 - a_{10} + a_{14} - a_{15} + a_{19} - a_{20} + a_{24} \\ a_1 = a_4 - a_6 + a_9 - a_{11} + a_{14} - a_{16} + a_{19} - a_{21} + a_{24} \\ a_2 = a_4 - a_7 + a_9 - a_{12} + a_{14} - a_{17} + a_{19} - a_{22} + a_{24} \\ a_3 = a_4 - a_8 + a_9 - a_{13} + a_{14} - a_{18} + a_{19} - a_{23} + a_{24} \end{cases}$$

$a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{19}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$ - свободные

Заключение

В ходе выполнения магистерской работы были изучены материалы по теме «Построение функций с ортонормированной системой сдвигов для локальных полей», и решена намеченная цель - построение алгоритма конструюрующего функции, сдвиги которой образуют ортонормированную систему. Для достижения этой цели в ходе выполнения работы были решены следующие задачи:

1. Проанализированы основные свойства p-адических чисел и аддитивных характеров локальных полей.

2. Подробно разобраны примеры функций образующий кратномаштабный анализ.

3. Построен алгоритм. В качестве практической части, в соответствии с Приложением А, реализован программный модуль на языке Java, который строит и решает систему уравнений для нахождения функций с ортонормированной системой сдвигов.