Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Главные идеалы частичной полугруппы булевых матриц

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТОРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

КАРАБАНОВОЙ ТАТЬЯНЫ АНДРЕЕВНЫ
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ____________ В.Б.ПОПЛАВСКИЙ
должность, уч. степень, уч. звание подпись, ,дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ-мат.наук, профессор ____________ В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, ,дата инициалы, фамилия

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы.

Бурное развитие теории матриц над решетками в последнее время тесно связано с её приложениями в различных областях научного познания. Матрицы над решетками применяются и в медицине при решении проблем диагностики, и в генетике, и социальных науках, экономике, также в кибернетике, теории конечных недетерминированных автоматов, при решении проблем параллельных вычислений и их сложности. Очевидна также и связь теории матриц над решётками с такими математическими теориями как полугруппы, решетки, полукольца, полумодули, комбинаторика. Многие дискретные модели, возникающие в технике, физике, химии и геологии, построены с помощью матриц над решётками. Булевы матрицы над двухэлементной булевой алгеброй можно рассматривать как матрицы инцидентности графов. Очевидна также связь булевых матриц с математической логикой и бинарными отношениями. Все это подтверждает *актуальность* представленной темы квалификационной работы.

Цели и задачи работы.

Магистерская работа посвящена изучению алгебры булевых матриц. С одной стороны, булевы матрицы образуют булеву алгебру, операции которой определяются поэлементно. С другой стороны, кроме булевых операций вводится операция умножения булевых матриц, относительно которой квадратные булевы матрицы образуют полугруппу. В нашей магистерской работе изучаются свойства этих операций. Рассматривается проблема обратимости булевых матриц и разрешимости линейных матричных уравнений и неравенств. На множестве булевых матриц всевозможных размеров с операцией умножения вводятся понятия некоторых классов эквивалентностей через понятия главных идеалов. Изучаются ранговые функции, инвариантные на главных идеалах частичной полугруппе булевых матриц всевозможных конечных размеров. Изучение этих идеалов и указанных в связи с ними классов эквивалентностей составляет основную *цель* этой выпускной магистерской работы. *Задачей* магистерской работы является:

1. Определение и построение инвариантов идеалов частичной полугруппе булевых матриц всевозможных конечных размеров в форме ранговых функций;

2. Изучение свойств ранговых функций булевых матриц всевозможных конечных размеров;

3. Проведение вычислений ранговых функций конкретных матриц над различными булевыми алгебрами с применением вычислительной техники и непосредственно.

Структура работы.

Данная магистерская работа состоит из двух глав, содержащих по 5 и 6 параграфов соответственно и двух приложений. В конце приводится список литературы, состоящий из 23 наименований.

Научная новизна.

Алгоритмы вычисления столбцовых, строчных рангов были известны и ранее[1]. Различные системы компьютерной математики (Maple, Mathematica, MatLab, Derive и др.) применяются для указанных задач и содержат процедуры для расчетов, средств программирования, визуализации. Автором решена задача нахождения строчного и столбцового базисов булевой матрицы с применением программы Wolfram Mathematica.

[1]Закревский А.Д. Нахождение минимального дизъюнктивного базиса булевой матрицы // ДАН БССР. 1978. Т.22, №1. С. 39—41.

Положения, выносимые на защиту.

1. Приводится подробное доказательство основной теоремы 2.5.6. В ней указывается, что в некотором J-классе частичной полугруппы булевых матриц всевозможных конечных размеров существует квадратная $n \times n$-матрица с ненулевым определителем тогда и только тогда, когда столбцовые, строчные, факторизационный и минорный ранги любой матрицы такого класса равны между собой и равны n. Все $n \times n$-матрицы этого J-класса имеют равные определители, а определители квадратных матриц большего размера равны нулю.

2. В качестве примеров приводятся вычисления различных рангов булевых матриц для разных случаев выбора булевых алгебр.

3. Составлена и апробирована программа вычисления строчных и столбцовых рангов для матриц с элементами из тривиальной булевой алгебры.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе "Алгебра булевых матриц" определяются по аналогии с обычной матричной теорией для булевых матриц понятия симметрии и косой симметрии.

Определение 1.2.1. Булева матрица A называется симметричной, если $A^T \cap A' = O$.

Булева матрица A называется кососимметричной, если $A^T \cap A = 0$.

Следующее утверждение указывается однозначность представления булевой квадратной матрицы в виде дизъюнктной суммы симметричной и кососимметричной частей этой матрицы.

Теорема 1.2.4. Любая булева матрица может быть однозначно разложена на несвязные симметричную и кососимметричную матрицу, т.е представима в виде объединения непересекающихся симметричной и кососимметричной матриц.

Далее даются определения строчно- и столбцово-совместимых матриц и изучаются их свойства, которые применяются для описания обратных булевых матриц. Следующая теорема показывает, что обратные булевы матрицы являются аналогами числовых ортогональных матриц, т.е. $A^{-1} = A^T$.

Теорема 1.4.2. Булева матрица имеет обратную тогда и только тогда, когда она ортогональна.

Отдельно рассматриваются решения уравнений $XA = B$ и $AX = B$. Основной результат изложен в теореме 1.5.4: уравнение $XA = B$ имеет решение тогда и только тогда, когда $B \subset (B'A^T)'A$.

Вопрос разрешимости неравенства вида $XA \subseteq B$ или $AX \subseteq B$ решается несложно. Однако, простые критерии разрешимости противоположных неравенств остаются неизвестными. Достаточные условия разрешимости неравенств вида $XA \supseteq B$ или $AX \supseteq B$ в терминах рангов булевых матриц был получен В.Б. Поплавским [2] [3]. В магистерской работе мы приводим некоторый частный случай разрешимости неравенств указанного типа (теорема 1.5.6), найденного Люцем в известной работе[4], и приводим доказательство этого достаточного условия.

Теорема 1.5.6. Пусть A и B булевы матрицы одного и того же порядка. Если существует матрица C такая, что $C \subseteq A$ и $B \subseteq IC$, то все матрицы X, удовлетворяющие условию $X \supseteq BC^T$, дают решение неравенства $XA \supseteq B$. Здесь I – квадратная матрица, все элементы которой являются единицами исходной булевой алгебры.

В заключении первой главы указываются характеристики делителей нуля в полугруппе булевых матриц через свойство строчной или столбцовой совместимости булевой матрицы в виде следующего утверждения.

Теорема 1.5.7. Булева матрица A является правым (левым) делителем нуля, тогда и только тогда, когда A не является строчно (столбцово) совместимой.

Во второй главе "Идеалы частичной полугруппы булевых матриц и их инварианты" рассматривается частичная полугруппа булевых матриц всевозможных размеров над произвольной булевой алгеброй, на которой определена частичная, т.е. определенная не для всех элементов, операция произведения булевых матриц. На этой полугруппе, аналогично классам Грина $\mathbf{H}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{J}$ в теории полугрупп [5] , определяются классы эквивалентностей $\varepsilon_H, \varepsilon_R, \varepsilon_C, \varepsilon_D, \varepsilon_J$, используя понятия односторонних и двусторонних идеалов частичной полугруппы булевых матриц всевозможных размеров.

---

[2] Поплавский В.Б. Минорный ранг, нули определителя булевой матрицы и их приложения// Дискретная математика. 2011.23:3. С. 93-119.

[3] Поплавский В.Б. Булевы матрицы и определители./ В.Б. Поплавский. LAP Lambert Academic Publishing KG. 2011.

[4] Luce R.D. A note on Boolean matrix theory// Proc. Am. Math. Soc. 1952. 3. P.382—388.

[5] Клиффорд А. Алгебраическая теория полугрупп: в 2т. / Клиффорд А., Престон Г. М.:"МИР 1972. Т.1. 287 с.; Т.2. 422 с.

В работе вводятся понятия столбцового $rank_C A$, строчного $rank_R A$, факторизационного $rank_f A$, минорного $rankA$ и перманентного $rank_{Per} A$ рангов булевой матрицы A.

Определение 2.4.1. *Минорным рангом* ненулевой матрицы назовем натуральное число k ($1 \leq k \leq min(m,n)$), удовлетворяющее двум условиям: существует квадратный блок M_k порядка k матрицы A, определитель которого отличен от нуля, и если из матрицы A можно построить $(k+1)$ -блоки, то их определители равны нулю.

Ранг нулевой матрицы, считается равным нулю.

Определение 2.4.3. *Перманентным рангом* назовем наибольший порядок k квадратного блока, перманент которого отличен от нуля. Перманентный ранг нулевой матрицы считается равным нулю. Обозначим его как $k = rank_{Per} A$.

Очевидно, из включения $DetA \subseteq PerA$, верного для любой квадратной булевой матрицы A , сразу следует сравнение перманентного и минорного рангов, указанное в следующей теореме.

Теорема 2.4.2. Для любой матрицы с элементами из булевой алгебры выполняется неравенство

$$rank_{Per} A \geq rankA.$$

Показывается, что столбцовые, строчные, факторизационные и минорные ранги являются инвариантами для J -класса частичной полугруппы булевых матриц всевозможных конечных размеров. Причем минорные ранги не превосходят столбцовые, строчные, факторизационные и перманентные ранги. Точнее, выполняется следующая теорема.

Теорема 2.5.3. Для любой булевой матрицы A выполняются следующие неравенства:

$$min(rank_R A, rank_C A) \geq rank_f A \geq rankA.$$

Следующее утверждение аналогично известному свойству матриц с элементами из поля.

Теорема 2.5.4. Минорный ранг произведения любых булевых матриц не превосходит минорных рангов сомножителей.

Инвариантность минорного ранга утверждает следующая теорема.

Теорема 2.5.5. Минорные ранги всех матриц, находящихся в одном ε_J -классе частичной полугруппы булевых матриц всевозможных размеров $\mathbf{M(B)}$, равны.

Следующая теорема подводит итог исследованиям рангов для булевых матриц, порождающих один и тот же двусторонний идеал частичной полугруппы булевых матриц всевозможных конечных размеров.

Теорема 2.5.6. Существует квадратная $n \times n$-матрица с ненулевым определителем, принадлежащая некоторому ε_J-классу, тогда и только тогда, когда столбцовый, строчный, факторизационный и минорный ранги любой матрицы этого же ε_J-класса равны между собой и равны n. Определители всех матриц того же размера $n \times n$ равны, а определители квадратных матриц, принадлежащие этому же ε_J-классу, но большего чем $n \times n$ размера, равны нулю.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полукольцевые матрицы имеют многочисленные приложения в социальных науках, экономике, кибернетике, различных математических теориях, таких как полугруппы, решетки, полукольца, полумодули, комбинаторика. Многие дискретные модели, возникающие в технике, физике, химии и геологии, построены с помощью матриц с элементами из полуколец. Булевы матрицы над двухэлементной булевой алгеброй можно рассматривать как пример таких матриц, имеющих непосредственную связь с математической логикой и бинарными отношениями. Таким образом, актуальность представленной темы квалификационной работы очевидна.

Магистерская работа посвящена алгебре булевых матриц с различными операциями над булевыми матрицами. Изучены свойства этих операций. Рассмотрены проблемы обратимости булевых матриц, разрешимости линейных матричных уравнений и неравенств. На множестве булевых матриц всевозможных размеров с частичной операцией умножения, используя понятия главных идеалов полученной полугруппы, рассмотрены классы эквивалентностей Грина. Изучены многочисленные ранговые функции, инвариантные на главных идеалах частичной полугруппе булевых матриц всевозможных конечных размеров. Приведены многочисленные примеры с расчетами, подтверждающими соответствующие утверждения.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ РАБОТЫ

1. Карабанова Т.А. Исследование булевых матриц в Wolfram Mathematica // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: тезисы докладов IX Международной школы- конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых. - Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. С. 368