Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Группы отражений и правильные многогранники

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

СУХОРУКОВОЙ ВАЛЕРИИ ВЛАДИМИРОВНЫ
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ______________________ А.Н. СЕРГЕЕВ
должность, уч. степень, уч. звание подпись, ,дата инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
доктор физ-мат.наук, профессор ______________________ В.В.РОЗЕН
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Правильные многогранники с древних времен привлекали внимание ученых, строителей и архитекторов. Пифагорейцы считали их божественными и использовали в своих философских сочинениях о существе мира. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий ученый Платон. Правильным многогранникам посвящена последняя XIII книга знаменитых «Начал» Евклида. К ним же обращались и в более позднее время. Это видно из научных трудов Иоганна Кеплера. Многогранники – это один из фундаментальных объектов математики, который находит отражение во многих ее областях, например, геометрии, анализе, теории представлений, теории чисел, линейном программировании[1], теории оптимального управления. В этом и заключается актуальность данной работы. Данная тема тесно связана с топологией, теорией графов. Теория многогранников осталась актуальной и бурно развивающейся областью и по сей день. Некоторые вопросы теории многогранников можно найти в работах Э.Б. Винберга[2] и В.О. Бугаенко.[3] Обзором последних достижений в данной области является книга Г.М. Циглера[4].Таким образом знания по данной проблематике являются важными для современного общества.

Цели и задачи работы. Цель данной работы – изучить правильные многогранники с точки зрения групп, порожденных отражениями. В рамках исследования решены следующие задачи: подробно изучены группы, порожденные отражениями и их приложение в геометрии; изучены выпуклые и правильные многогранники и их свойства; доказана теорема о

---

[1] Кострикин, А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. СПб: Лань, 2008. С. 212-215.

[2] Винберг, Э.Б. Курс алгебры. М.: Издательство московского центра непрерывного математического образования, 2011. 591 с.

[3] Бугаенко, В. О. Правильные многогранники // М.: Математическое просвещение. Третья серия. 2003. вып. 7. С. 107–115.

[4] Циглер, Г.М. Теория многогранников. М.: Издательство московского центра непрерывного математического образования, 2014. 568 с.

том, что группа симметрий n-мерного правильного многогранника порождается n отражениями; доказательство этого факта приведено для двух случаев: на плоскости и в пространстве; в приложении Wolfram Mathematica написана программа для визуализации некоторых симметрий куба.

Описание структуры работы. Магистерская работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 21 наименование, в том числе 3 ссылки на Интернет-ресурсы, и двух приложений. Объем работы составляет 63 страницы. В работе представлены 17 иллюстраций.

Краткая характеристика материалов работы. Работа состоит из четырех разделов. В первом разделе приведены основные определения и теоремы теории групп, порожденных отражениями. Приведены примеры таких групп. Даны определения систем корней, графов Кокстера и их классификация. Второй раздел посвящен определению выпуклых и правильных многогранников и их свойств. Приведено доказательство теоремы Минковского-Вейля и рассмотрены движения евклидова аффинного пространства[5]. В третьем разделе подробно доказана теорема о том, что группа симметрий n-мерного правильного многогранника порождается n отражениями. Рассмотрены два случая: на плоскости и в n-мерном пространстве. В четвертом разделе сформулирована задача визуализации некоторых симметрий куба в программе Wolfram Mathematica. Код программы и результаты выполнения приведены в приложениях.

Научная новизна и значимость работы. Научная значимость работы заключается в детальном изложении классификации конечных групп, порожденных отражениями. В дальнейшем материалы работы могут послужить основой для классификации правильных многогранников в евклидовом пространстве с точки зрения групп, порожденных отражениями. Одним из лучших современных изложений по данной проблематике является

[5] Винберг, Э.Б. Курс алгебры. М.: Издательство московского центра непрерывного математического образования, 2011. С. 302-309.

книга Е.Ю Смирнова «Группы отражений и правильные многогранники»[6], но, к сожалению, изложение краткое и не всегда полное, основанное на классификации групп отражений. Научная новизна работы состоит в том, что приведено новое, более подробное доказательство основных утверждений этой книги, в частности, теоремы о группе симметрий правильного многогранника.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносится следующее положение.

1. Теорема о группе симметрий правильного многогранника (теорема 4): группа симметрий правильного многогранника размерности n порождается n отражениями.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Для того, чтобы подробно изучить группы порожденные отражениями[7], необходимо сопоставить каждой такой группе множество отражений, а затем множеству отражений сопоставим множество векторов которые определяют эти отражения. Чтобы отображение было корректно определено будем считать, что все векторы имеют длину равную единице.

В первой главе «Определение и классификация конечных групп отражений» работы вводятся основные определения и теоремы теории групп, порожденных отражениями.

Определение 1. Ортогональной группой[8] $O(V)$ евклидова пространства V, называется множество обратимых линейных преобразований этого пространства A, которые сохраняют скалярное произведение, то есть $(Au, Aw) = (u, v)$.

[6] Смирнов, Е.Ю. Группы отражений и правильные многогранники. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 2009. 48 с.

[7] Хамфрис, Д. Группы отражений и группы Кокстера. Издательство Кембриджского университета, 1991. 145 с.

[8] Винберг, Э.Б. Курс алгебры. М.: Издательство московского центра непрерывного математического образования, 2011. С. 159-161. 253-254.

Возьмем какой-нибудь ненулевой вектор $\alpha \in V$ и обозначим через H_α подпространство состоящее из векторов ортогональных вектору α.

Определение 2[9]. Отражением относительно гиперплоскости H_α называется преобразование $S \in O(V)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $S\,(\alpha) = -\alpha$;
2. S поточечно оставляет на месте «зеркало» H_α : $S(\beta) = \beta$ для всех $\beta \epsilon H_\alpha$.

Теорема 1. Ортогональная группа евклидова векторного пространства порождена отражениями.

Определение 3. Группа G называется порожденной своим подмножеством S если любой элемент группы G может быть представлен в виде конечного произведение элементов из S и обратных к ним.

Определение 4. Конечная подгруппа $W \subset O(V)$ называется группой отражений (группой порожденной отражениями), если существуют такие отражения $S_{\alpha_1}, \ldots, S_{\alpha_r} \in W$, что они порождают W.

Определим множество $R(W)$ следующим образом: $R(W) = S \cup (-S)$, где S множество векторов единичной длины относительно которых происходят все отражения из W. И для любого множества S обозначим через $W(S)$ группу, порожденную всеми отражениями относительно элементов из S.

Введем определение системы корней[10].

Определение 5. Конечное множество ненулевых векторов $R \subset V$ называется системой корней, если оно линейно порождает пространство V и выполнены следующие условия:

1. Из условия $v \in R$ следует, что $-v \in R$ и других корней

[9] Смирнов, Е.Ю. Группы отражений и правильные многогранники. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 2009. С. 10-12.

[10] Хамфрис, Д. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений / пер., Б.Р. Френкина. М.: МЦНМО, 2008. С. 58-61.

коллинеарных корню v нет.

2. Если $v \in R$, то $s_v(R) = R$.

Определение 6. Размерность пространстве называется рангом системы корней.

Следующая лемма показывает взаимосвязь между группой, порожденной отражениями и системой корней.

Лемма 1. Пусть W – группа, порожденная отражениями. Тогда $R(W)$ является системой корней.

Теорема 2. Всякая двумерная система корней, является системой корней группы симметрий правильного многоугольника.

Каждой группе, порожденной отражениями, можно сопоставить множество отражений. А затем этому множеству сопоставить множество векторов, которые определяют эти отражения. Эти векторы образуют систему корней, а в этой системе можно выбрать систему простых коней. По каждой системе простых корней может быть построен некоторый граф, называемый графом Кокстера этой группы. При классификации групп, порожденных отражениями, а так же правильных многогранников, возникает задача классификации систем векторов в евклидовом пространстве. Правильным языком здесь является язык теории графов.

Пусть есть набор $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, линейно независимых векторов единичной длины. Каждому такому набору сопоставим взвешенный граф *G(B),* т.е. граф, каждому ребру которого поставлено в соответствие действительное число называемое его весом, по следующему правилу:

1. множество вершин - это множество заданных линейно независимых векторов B .

2. двухэлементное множество $\{v_i, v_j\}$ является ребром, если $(v_i, v_j) \neq 0$ и этому ребру приписывается вес равный (v_i, v_j).

Множество линейно независимых векторов в Евклидовом пространстве называется допустимым, если все они имеют единичную длину, а попарные скалярные произведения $(v_i, v_j) = -cos\,(\frac{\pi}{n_{ij}})$, где n_{ij} - целое неотрицательное число не меньше двух, зависящее от пары выбранных векторов.

Из набора линейно независимых векторов в евклидовом пространстве возникает граф Кокстера.

Определение 7. Граф Кокстера с n вершинами называется допустимым, если он соответствует некоторой конечной группе отражений.

Очевидно, что для допустимости графа Кокстера необходимо, чтобы существовала система из n векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, попарные углы между которыми равнялись бы $\angle(\alpha_i, \alpha_j) = \pi - \frac{\pi}{n_{ij}}$.

Список всех допустимых графов Кокстера даст полную классификацию конечных групп отражений. Достаточно классифицировать только связные графы Кокстера.

Определение 8. Граф G называется связным, если для любой пары различных вершин этого графа существует цепь, соединяющая эти вершины[11].

Следующая теорема дает классификацию допустимых векторов.

Теорема 3. Любой граф Кокстера является несвязным объединением графов одного из следующих типов $A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4, I_2(m)$[12].

Для доказательства теоремы о группе симметрий правильного многогранника во второй главе «Определение выпуклых и правильных многогранников» вводятся необходимые понятия и теоремы.

Для любой непостоянной аффинно-линейной функции f на пространстве положим:

$$H_f = \{p \in S: f(p) = 0\},$$

$$H_f^+ = \{p \in S: f(p) \geq 0\}, \qquad H_f^- = \{p \in S: f(p) \leq 0\} \left(= H_{-f}^+\right).$$

[11] Берж, К. Теория графов и её приложения. М.: ИЛ, 1962. 320 с.

[12] Смирнов, Е.Ю. Группы отражений и правильные многогранники. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 2009. С. 28-29.

Множество H_f является гиперплоскостью, множества H_f^+ и H_f^- называются (замкнутыми) полупространствами, ограниченными гиперплоскостью H_f. Всякое полупространство является выпуклым множеством. Всякий отрезок, соединяющий точку из с точкой из H_f^+, пересекает гиперплоскость H_f[1].

Определение 9. Пересечение конечного числа полупространств называется выпуклым многогранником.

Иными словами, выпуклый многогранник есть множество решений конечной системы линейных неравенств. Очевидно, что пересечение любого числа выпуклых многогранников является выпуклым многогранником.

Определение 10. Размерностью многогранника М называется размерность наименьшего аффинного подпространства в Е, содержащего М.

Определение 11. Гранью выпуклого многогранника M называется всякое непустое пересечение этого многогранника с некоторым числом его опорных гиперплоскостей.

Нульмерная грань называется вершиной, одномерная – ребром, $(n-1)$-мерная, где $n = \dim aff\ M$ – гипергранью.

Определение 12. Аффинное пространство S, ассоциированное с евклидовым пространством V, называется евклидовым аффинным пространством.

Определение 13. Движением евклидова аффинного пространства S называется всякое его аффинное преобразование, дифференциал которого является ортогональным оператором[13].

Очевидно, что движение сохраняет расстояние между точками и, обратно, всякое аффинное преобразование, сохраняющее расстояние между точками, является движением.

Движения евклидова пространства S образуют группу, обозначаемую

[13] Винберг, Э.Б. Курс алгебры. М.: Издательство московского центра непрерывного математического образования, 2011.С. 302.

$Isom(S)$. Группа $Isom(S)$ порождается отражениями относительно гиперплоскостей.

Для любой фигуры M евклидова пространства S можно определить множество движений пространства S, переводящих M в себя. Это множество образует группу симметрии M: $Sym(M) = \{f \in Sym(S) | f(M) = M\}$.

Если M - ограниченный выпуклый многогранник, то группа $Sym(M)$ конечна, так как движение, отображающее многогранник M на себя, однозначно определяется тем, как оно переставляет его вершины, а таких перестановок может быть конечное число. Кроме того, группа $Sym(M)$ сохранят центр масс многогранника M и потому фактически представляет собой подгруппу ортогональной группы.

Наиболее симметричны так называемые правильные многогранники[14].

Пусть M - выпуклый многогранник в n-мерном евклидовом пространстве.

Определение 14. Флагом многогранника M назовем набор его граней $\{F_0, F_1, \dots, F_{n-1}\}$, где $\dim F_k = k$ *и* $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset M$.

Определение 15. Выпуклый многогранник M называется правильным, если для любых двух его флагов существует движение $f \in Sym(M)$, переводящее первый из этих флагов во второй.

Если М правильный многогранник, то группа $Sym(M)$ будет сохранять его центр масс. Поэтому можно рассматривать ее как подгруппу в группе ортогональных преобразований $O(V)$ пространства V, поместив начало координат пространства V в центр масс многогранника.

Так как движение $f \in Sym(M)$ определяется тем, куда оно переводит какой либо один флаг, то порядок группы симметрии правильного многогранника равен числу его флагов.

Двумерные правильные многогранники, это обычные правильные многоугольники.

[14]Бугаенко, В.О. Правильные многогранники // М.: Математическое просвещение. Третья серия. 2003. вып. 7. С. 107–115.

Определение 16. Многоугольник M называется правильным, если любой его флаг $M \supset [A, B] \supset A$ можно перевести в любой другой флаг $M \supset [A', B'] \supset A'$ с помощью элемента группы симметрии.

Третья глава работы «Группа симметрий правильного многогранника» посвящена подробному доказательству теоремы 4. Прежде чем доказать теорему, ее необходимо пояснить на примере правильного многоугольника.

Группа симметрий правильного многоугольника порождается двумя отражениями, т.к. он двумерен. Это отражения S_1 – относительно прямой, проходящей через центр масс многоугольника и середину его ребра, и отражение S_2 - относительно прямой, проходящей через центр масс и вершину многоугольника.

Аналогичным образом строятся симметрии в случае правильного многогранника.

Теорема 4. Группа симметрий n-мерного правильного многогранника порождается n отражениями.

Предложение 1. Пусть N_1 *и* N_2 соседние гиперграни многогранника M, тогда найдется симметрия S_{N_1,N_2}, которая переводит гипергрань N_1 в N_2 и является отражением.

Для двух соседних гиперграней N_1 *и* N_2 многогранника M, которые пересекаются по грани K_0, построим два флага:

$$M \supset \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \end{matrix} \supset K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_r.$$

Симметрия $S_{N_1,N_2}(N_1) = N_2$ переводит гипергрань N_1 в N_2, а все остальные элементы флага сохраняет.

Предложение 2. Если K и L – грани размерности n-2, содержащиеся в гиперграни N многогранника M, то существует симметрия $\tau_{L,K}^{N}$, которая переводит грань K в грань L.

Рассмотрим два флага:

$$M \supset N \supset \begin{matrix} K \supset K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_r \\ L \supset L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_r \end{matrix}.$$

Симметрия $\tau_{L,K}^{N}$ переводит флаг $M \supset N \supset K \supset K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_r$ во флаг $M \supset N \supset L \supset L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_{r.}$ Эта симметрия обладает следующими свойствами: $\tau_{L,K}^{N}(M) = M, \tau_{L,K}^{N}(N) = N, \tau_{L,K}^{N}(K) = L.$

Лемма 2. Пусть даны три попарно соседние гиперграни N_1, N_2, N_3 и $N_1 \cap N_2 = K_1,$ $N_2 \cap N_3 = K_2,$ где K_1 и K_2 грани размерности $n-2.$ Определим грань L (размерности n-2) следующим образом: $L = S_{N_1,N_2}(K_2).$ Тогда справедливо равенство:

$$S_{N_3,N_2} = S_{N_1,N_2}\tau_{L,K_1}^{N_1}S_{N_1,N_2}\left(\tau_{L,K_1}^{N_1}\right)^{-1}S_{N_1,N_2}$$

Лемма 3. Любая симметрия, сохраняющая гипергрань N_2 многогранника M, получается из симметрии, сохраняющей гипергрань N_1, посредством сопряжения с S_{N_2,N_1}.

Из лемм 2 и 3 получаем следствие.

Следствие 1. Пусть есть две гиперграни $N\, u\, N'$ многогранника M, обозначим $W =< S_{N_1,N_2}, Sym(N_1) >$ - подгруппа, порожденная S_{N_1,N_2} и множеством симметрий, сохраняющих гипергрань N_1. Тогда существует симметрия, которая принадлежит группе W, и переводит гипергрань N в N'.

Лемма 4. Группа симметрии правильного многогранника M порождена симметрией S_{N_1,N_2} и группой симметрий гиперграни N_1.

Этот факт доказывается по индукции. N_1 - это многогранник размерности $n-1$, его группа симметрий порождается $n-1$ отражением. Вся группа симметрий многогранника M порождается n отражениями, т.к. мы добавляем симметрию S_{N_1,N_2}. Тем самым мы доказали основное утверждение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были подробно изучены группы, порожденные отражениями и их приложение в геометрии. Изучены выпуклые и правильные многогранники и их свойства. На основе полученных знаний самостоятельно было доказано, что группа симметрий правильного многогранника порождена группой его отражений, количество которых совпадает с размерностью многогранника. Доказательство этого факта приведено для двух случаев: на плоскости и в пространстве. В приложении Wolfram Mathematica была написана программа для визуализации некоторых симметрий куба. Результаты самостоятельного исследования доложены на студенческой научной конференции «Математика. Механика», секция «Геометрия и алгебра интегрируемых систем».