

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Компьютерные модели геодезических на многообразиях

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 – Математика и компьютерные науки,

код и наименование направления

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

ФЁДОРОВОЙ ОЛЬГИ НИКОЛАЕВНЫ

фамилия. имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.пед.н.

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

А.В.БУКУШЕВА

инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

доктор физ-мат. наук, профессор

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

В.В.РОЗЕН

инициалы, фамилия

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность. Данная работа посвящена исследованию геометрии риманова многообразия, геодезические которого представляют собой геометрические образы траекторий движения частицы единичной массы. Актуальность предлагаемого исследования заключается в том, что полученные в работе результаты не только характеризуют геометрические свойства рассматриваемого многообразия, но и позволяют использовать их для изучения конкретных динамических систем. С геометрической точки зрения наложение линейных ограничений на скорость движения механической системы означает задание на многообразии \mathbb{R}^3 со специальной метрикой двумерного распределения. В этом случае траектория движения точки будет описываться геодезической, всюду касающейся заданного распределения. Для явного нахождения уравнений движения механической системы необходимо проинтегрировать дифференциальные уравнения второго порядка. В общем случае эти уравнения допускают лишь численное интегрирование. Зная геометрию многообразия \mathbb{R}^3 , можно добиться упрощения уравнений геодезических, и, тем самым, привести их к виду, доступному для явного интегрирования.

Цели и задачи. Целью работы является исследование геометрии многообразия \mathbb{R}^3 со специальной метрикой и использование полученных результатов для нахождения уравнений геодезических.

Задачи исследования.

1. Найти выражение коэффициентов связности и компонент тензора кривизны в голономных координатах.
2. Изучить простейшие свойства многообразия. В частности, выяснить, является ли многообразие со специальной метрикой многообразием Эйнштейна, или нет.
3. Определить двумерное распределение на многообразии и ввести на многообразии координаты, относительно которых уравнения допустимых геодезических будут иметь простейший вид.

4. Проинтегрировать полученные уравнения, используя программные средства.

Описание структуры работы. Магистерская работа состоит из введения, пяти разделов, заключения и списка использованных источников, содержащего 20 наименований. Объем работы 52 страницы.

Научная новизна и значимость работы. В настоящей работе исследована геометрия многообразия со специальной метрикой. Полученные результаты были использованы для явного нахождения уравнений движения механической системы со связями.

Положения, выносимые на защиту.

1. Многообразие (\mathbb{R}^3, g) , где $g = \begin{pmatrix} 1 + (x^2)^2 & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, является римановым многообразием с ненулевым тензором кривизны.

2. Для заданного двумерного распределения существует такая система координат, в которой уравнения геодезических принимают вид, доступный для явного интегрирования.

Краткая характеристика материалов работы. В первом разделе магистерской работы вводится понятие гладкого многообразия, во втором - понятие тензорного поля на многообразии. В третьем разделе описываются ковариантное дифференцирование и геодезические. В четвертом разделе рассматриваются тензоры кручения и кривизны. В пятом разделе рассматривается трехмерное риманово многообразие с метрикой специального вида. В заключении сделаны основные выводы по работе.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Трехмерное риманово многообразие с метрикой специального вида

Рассмотрим арифметическое пространство $M = \mathbb{R}^3$.

Координатное представление метрического тензора g в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, где

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \partial_1 - x^2 \partial_3, \\ \bar{e}_2 = \partial_2, \\ \bar{e}_3 = \partial_3, \end{cases}$$

имеет вид: $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Выразим $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ векторные поля $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

$$\begin{cases} \partial_1 = \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_3, \\ \partial_2 = \bar{e}_2, \\ \partial_3 = \bar{e}_3. \end{cases}$$

Найдем компоненты метрического тензора g в базисе $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$:

$$g(\partial_1, \partial_1) = g(\bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_3, \bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_3) = 1 + (x^2)^2,$$

$$g(\partial_1, \partial_2) = g(\bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_3, \bar{e}_2) = 0,$$

$$g(\partial_1, \partial_3) = g(\bar{e}_1 + x^2 \bar{e}_3, \bar{e}_3) = x^2,$$

$$g(\partial_2, \partial_2) = 1, \quad g(\partial_3, \partial_3) = 1, \quad g(\partial_2, \partial_3) = 0.$$

Координатное представление метрического тензора g в базисе $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$

имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 + (x^2)^2 & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица (g^{ij}) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь формулой $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$, ВЫЧИСЛИМ

коэффициенты связности Γ_{ij}^k :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{y}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Пользуясь формулой $R_{lkj}^i = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{lk}^i}{\partial x^j} + \Gamma_{mk}^i \Gamma_{lj}^m - \Gamma_{mj}^i \Gamma_{lk}^m$, найдем

координаты тензора кривизны R_{lkj}^i .

Out[11]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{y}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{y}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & (3 - y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & (-3 + y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{y}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{y}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ \frac{1}{4} & (-1 - y^2) & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & (1 + y^2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Тензор $R_{ij} = R_{Sij}$ называется тензором Риччи. Если $R_{ij} = \lambda g_{ij}$, где λ - некоторая функция, то риманово многообразие является пространством Эйнштейна¹.

Вычислим координаты тензора Риччи:

Out[14]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & (-1 + y^2) & 0 & \frac{y}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{y}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Получим, что тензор Риччи тождественно не равен нулю.

Таким образом, рассматриваемое многообразие не является многообразием Эйнштейна.

Также получив коэффициенты связности Γ_{ij}^k , пользуясь формулой

$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0$, составим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x^1}{dt^2} + x^2 \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^2}{dt} + \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^3}{dt} = 0; \\ \frac{d^2 x^2}{dt^2} - x^2 \left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 - \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^3}{dt} = 0; \\ \frac{d^2 x^3}{dt^2} + (1 - (x^2)^2) \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^1}{dt} - x^2 \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^3}{dt} = 0. \end{cases}$$

Решением данной системы дифференциальных уравнений являются геодезические трехмерного риманова многообразия с метрикой специального вида.

¹ Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Риманова геометрия. М. : ВИНТИ, 2002. 262 с.

Зададим на римановом многообразии (R^3, g) со специальной метрикой гладкое распределение $D = Span(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Составим уравнение геодезических:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x^a}{dt^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} = 0, \\ \frac{dx^n}{dt} = \Gamma_a^n \frac{dx^a}{dt}, \end{cases}$$

где $a, b, c = 1, 2; n = 3$.

Так как метрический тензор в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ имеет вид $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

то $\Gamma_{bc}^a = 0$. Тогда система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x^1}{dt^2} = 0, \\ \frac{d^2 x^2}{dt^2} = 0, \\ \frac{dx^3}{dt} = \Gamma_1^3 \frac{dx^1}{dt} + \Gamma_2^3 \frac{dx^2}{dt}. \end{cases}$$

Определим коэффициенты связности:

$$\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n, \quad \vec{e}_1 = \partial_1 - x^2 \partial_3 \Rightarrow \Gamma_1^3 = x^2, \quad \vec{e}_2 = \partial_2 \Rightarrow \Gamma_2^3 = 0.$$

Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x^1}{dt^2} = 0, \\ \frac{d^2 x^2}{dt^2} = 0, \\ \frac{dx^3}{dt} = x^2 \frac{dx^1}{dt}, \end{cases}$$

в которой первые два уравнения означают, что векторное поле вдоль кривой параллельно, а третье уравнение – геодезическая касается распределения D .

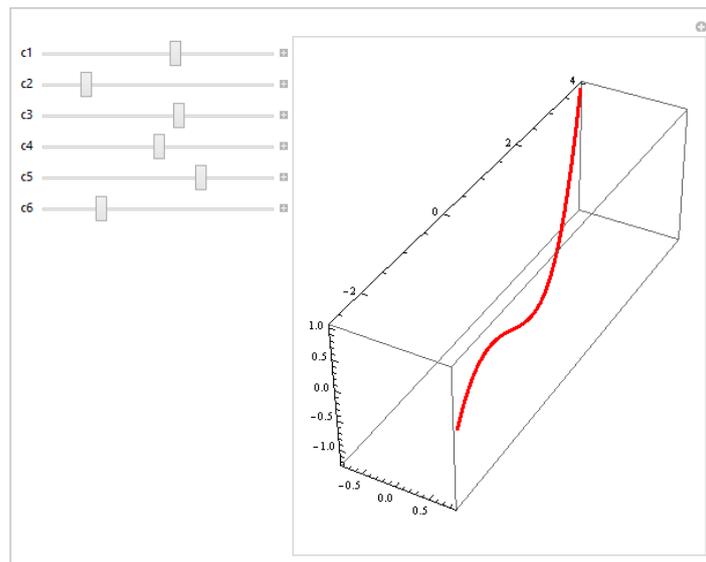
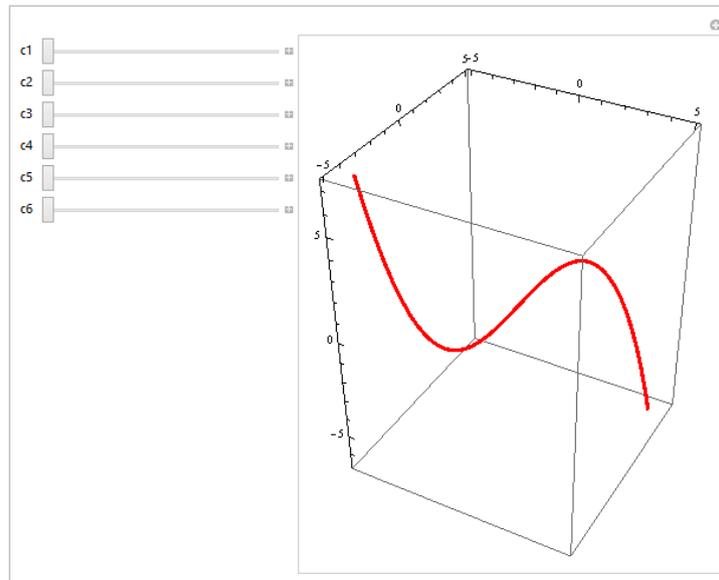
Из первых двух уравнений получим, что

$$x_1(t) = C_1 t + C_2, \quad x_2(t) = C_3 t + C_4.$$

Тогда из третьего уравнения следует, что

$$x_3(t) = \frac{1}{6} C_1 C_2 t^3 + \frac{1}{2} C_1 C_4 t^2 + C_5 t + C_6.$$

Визуализируем геодезическую в Wolfram Mathematica.



Цилиндр, вложенный в риманово многообразие (R^3, g) со специальной метрикой

Пусть цилиндр задан параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a \cos v, \\ y = a \sin v, \\ z = u. \end{cases}$$

Получаем:

$$g = \begin{pmatrix} 1 + (x^2)^2 & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 + (a \sin v)^2 & 0 & a \sin v \\ 0 & 1 & 0 \\ a \sin v & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем $G_{\alpha\beta}$ по формуле: $G_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \cdot g_{ij}$,

где $i, j = 1, 2, 3, \alpha, \beta = 1, 2, u^1 = u, u^2 = v, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$.

Получаем: $G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -(a \sin v)^2 \\ -(a \sin v)^2 & 1 + (a \sin v)^4 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица $G^{\alpha\beta}$ имеет вид: $G^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 + (a \sin v)^4 & (a \sin v)^2 \\ (a \sin v)^2 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислим коэффициенты связности по формуле:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} G^{ks} (\partial_i G_{js} + \partial_j G_{is} - \partial_s G_{ij}), \text{ где } k, s, i, j = \overline{1, 2}.$$

Получаем:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0; \Gamma_{22}^1 = (-a^2) \cdot \sin 2v.$$

Составим уравнения геодезических по формуле: $\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0$,

получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^1}{dt^2} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 = 0; \\ \frac{d^2 u^2}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Решим систему и визуализируем решение в Wolfram Mathematica.

```

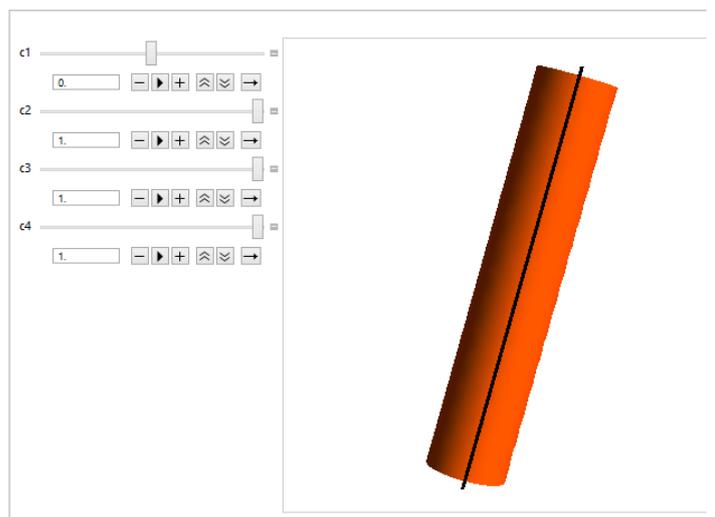
In[1]:= DSolve[{D[u[t], {t, 2}] - a^2 Sin[2 v[t]] D[v[t], t]^2 == 0,
  D[v[t], {t, 2}] == 0}, {u, v}, t]
Out[1]:= {{v -> Function[{t}, t C[1] + C[2]],
  u -> Function[{t}, t C[3] + C[4] - 1/4 a^2 Cos[2 C[2]] Sin[2 t C[1]] -
  1/4 a^2 Cos[2 t C[1]] Sin[2 C[2]]]}}

```

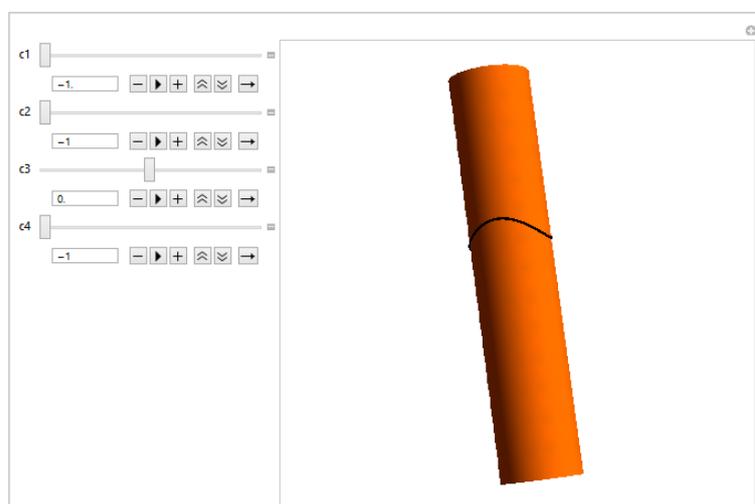
Пусть $a=1$. Таким образом, любая геодезическая линия на круговом цилиндре может быть записана в виде: $\rho(t) = \{\cos(c_1 t + c_2), \sin(c_1 t + c_2), c_3 t + c_4 - \frac{1}{4} \sin 2(c_1 t + c_2)\}$.

Нарисуем геодезические на цилиндре.

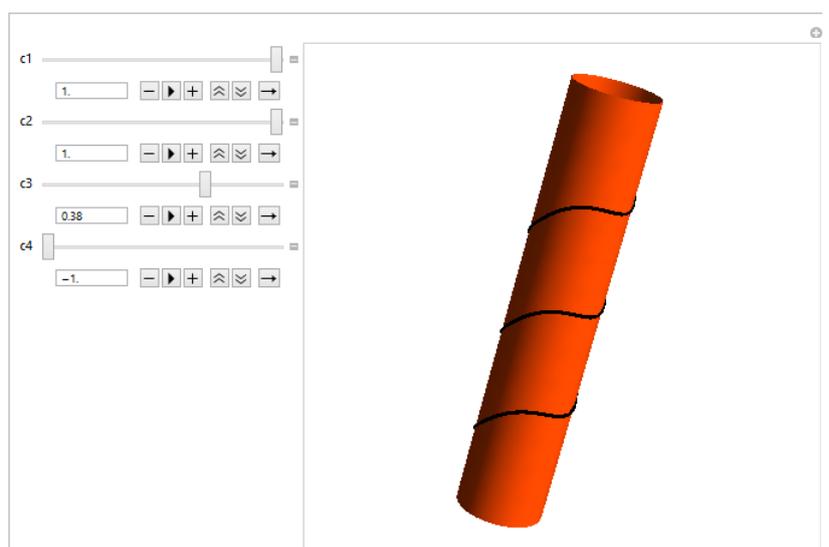
Если $c_1 = 0$, то $\rho(t) = \{\cos c_2, \sin c_2, c_3 t + c_4 - \frac{1}{4} \sin 2c_2\}$ - прямолинейные образующие цилиндра.



Если $c_3 = 0$, получим $\rho(t) = \{\cos(c_1 t + c_2), \sin(c_1 t + c_2), c_4 - \frac{1}{4} \sin 2(c_1 t + c_2)\}$.



Если $c_1 \neq 0$, $c_3 \neq 0$, то $\rho(t) = \{\cos(c_1 t + c_2), \sin(c_1 t + c_2), c_3 t + c_4 - \frac{1}{4} \sin 2(c_1 t + c_2)\}$ - винтовая линия на цилиндре.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показаны некоторые возможности использования системы Wolfram Mathematica при решении задач римановой геометрии. Одной из основных задач римановой геометрии является задача изучения поведения геодезических линий на римановых многообразиях.

Геодезические на римановых многообразиях находят приложения в прикладных исследованиях. Движения многих типов механических систем, а также тел или частиц в гравитационных и электромагнитных полях, в сплошной среде часто происходит по траекториям, которые можно рассматривать как геодезические линии некоторых пространств²³⁴.

В данной магистерской работе решены следующие задачи:

1. Найдены выражение коэффициентов связности и компонент тензора кривизны в голономных координатах.

2. Изучены простейшие свойства многообразия. В частности, выяснено, является ли многообразие со специальной метрикой многообразием Эйнштейна, или нет.

3. Определено двумерное распределение на многообразии и введены на многообразии координаты, относительно которых уравнения допустимых геодезических будут иметь простейший вид.

4. Проинтегрированы полученные уравнения, используя программные средства.

Также в ходе изучения были рассмотрены понятия гладкого многообразия, тензорного поля на многообразии, тензоры кручения и кривизны, составлены уравнения двух видов геодезических голономных и неголономных. Было рассмотрено трехмерное риманово многообразие с метрикой специального вида.

Полученные результаты выпускной квалификационной работы можно использовать в курсе компьютерной геометрии в вузах.

² Жукова Н.И., Багаев А.В. Геодезические линии на поверхностях: учебно-методическое пособие. Новгород : изд-во Нижегородского госуниверситета, 2008. 54 с.

³ Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005. 584 с.

⁴ Степанов С.Е. Геодезические линии // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т.6. №8. С. 115-120.