Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Инверсия относительно гиперцикла гиперболической плоскости положительной кривизны

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование подготовки

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

МЕХТИЕВОЙ САБИНЫ МАМЕД КЫЗЫ

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ______________ Л.Н.РОМАКИНА
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ.-мат.наук, профессор ______________ В. В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Инверсия евклидовой плоскости и евклидова пространства [1–4] (здесь и далее см. список используемых в работе источников) успешно используется при решении целого класса задач элементарной геометрии, играет важную роль в неевклидовой геометрии при построении модели плоскости Лобачевского [4], а также в теории функций комплексного переменного [2]. Кроме традиционных направлений в настоящее время инверсию применяют к решению задач в смежных областях математики [5]. Особый интерес вызывает инверсия неевклидовых пространств. С одной стороны, ее исследование служит развитию неевклидовой геометрии, раскрывая новые зависимости между объектами, с другой – позволяет с новых позиций взглянуть на известные факты геометрии Евклида. В связи с этим тема работы представляется актуальной.

Цель и задачи работы. Основной целью магистерской работы является изучение инверсии относительно гиперцикла гиперболической плоскости положительной кривизны. Для достижения данной цели были сформулированы и решены следующие задачи: изучена инверсия евклидовой плоскости и евклидова пространства; освоены методы исследования свойств преобразований евклидовых и псевдоевклидовых пространств размерности 2, 3, а также преобразований гиперболической плоскости положительной кривизны; изучены основные факты геометрии гиперболической плоскости $\hat{H}$ положительной кривизны в ее проективной модели, освоены принципы измерения объектов данной плоскости; изучены гиперциклы плоскости $\hat{H}$ как траектории точек при вращении относительно несобственной точки; исследованы способы задания инверсии относительно гиперцикла плоскости $\hat{H}$, конструктивно определено понятие инверсных точек; изучен метод аналитического задания инверсии; средствами Wolfram Mathematica подготовлена программа визуализации на евклидовой плоскости построения образов прямых при инверсии относительно гиперцикла плоскости $\hat{H}$.

Структура работы. Работа состоит из введения, трех разделов и списка использованных источников, содержащего 25 наименований. В работе представлена 31 иллюстрация.

В первом разделе "Основные факты геометрии гиперболической плоскости положительной кривизны" введены основные понятия и формулы, рассмотрены две модели плоскости $\hat{H}$. Второй раздел "Инверсия относительно гиперцикла" содержит теоретический материал непосредственно по теме исследования. Оригинальная часть исследования представлена в третьем разделе "Визуализация на евклидовой плоскости инверсии относительно гиперцикла гиперболической плоскости положительной кривизны".

Научная новизна и значимость работы. В работе представлена визуализация на евклидовой плоскости инверсии относительно гиперцикла гиперболической плоскости положительной кривизны средствами Wolfram Mathematica. Результаты работы могут быть использованы при обучении студентов по курсу гиперболической геометрии.

На защиту выносятся следующие положения.

1. Метод визуализации на евклидовой плоскости инверсии относительно гиперцикла плоскости $\widehat{H}$.

2. Основная теорема об образах прямой.

Теорема 2.2 [10, Теорема 3.3]. *На плоскости H^2 образом прямой l при инверсии относительно гиперцикла является:*

1) гипербола плоскости $\widehat{H}$, если прямая l пересекает горизонт базы инверсии в двух вещественных точках (такая гипербола содержит абсолютный полюс своей мнимой оси);

2) парабола плоскости Лобачевского, если прямая l является касательной к горизонту базы инверсии;

3) эллипс плоскости Лобачевского, если прямая l не имеет вещественных точек пересечения с горизонтом базы инверсии.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе по работам [1, 3, 14] введены основные факты геометрии гиперболической плоскости положительной кривизны, рассмотрены две ее модели.

Пусть $L_{n+1} - (n+1)$-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, L^*_{n+1} – множество всех ненулевых векторов пространства L_{n+1}. Непустое множество P_n назовем *проективным пространством* n измерений, порожденным векторным пространством L_{n+1}, если задано отображение $f\colon L^*_{n+1} \to P_n$, удовлетворяющее условиям:

1) f – сюръективное отображение;
2) равенство $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ выполняется тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны: $\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{y}$.

Условия 1), 2) назовем *аксиомами* проективного пространства, элементы множества P_n – *точками* проективного пространства.

Пусть L_{m+1} – векторное подпространство пространства L_{n+1}.

Множество всех точек пространства P_n, порожденных ненулевыми векторами пространства L_{m+1}, назовем m-мерной плоскостью пространства P_n. При $m = 0$, $m = 1$ и $m = n–1$ m-мерную плоскость назовем соответственно *точкой*, *прямой*, *плоскостью* и *гиперплоскостью* пространства P_n.

Проективную плоскость P_2 с фиксированной овальной линией [3] γ назовем *расширенной гиперболической плоскостью* и обозначим H^2. Внутри линии γ реализуется полная плоскость Лобачевского, а на внешней относительно нее части плоскости H^2 – *гиперболическая плоскость* $\widehat{H}$ *положительной кривизны*, при условии, что в качестве прямых приняты прямые трех типов, *эллиптические* (*гиперболические*), пересекающие линию γ в двух мнимо сопряженных (действительных) точках, и *параболические*, касательные к γ прямые. Линию γ называют *абсолютом* плоскости $\widehat{H}$.

Плоскость $\widehat{H}$ также может быть реализована в псевдоевклидовом 3-пространстве на сфере вещественного радиуса ρ с отождествленными диаметрально противоположными точками. Число ρ называют *радиусом кривизны* плоскости $\widehat{H}$.

Плоскость $\widehat{H}$ гомеоморфна листу Мебиуса без края. Все углы плоскости $\widehat{H}$ образуют 15 типов. Углы шести типов измеримы, углы трех типов имеют вещественные меры [14].

Все овальные линии плоскости относятся к 15 типам [17], линии восьми типов являются собственными. Линии четырех типов являются циклами, т.е. траекториями движений плоскости $\widehat{H}$. *Гиперциклом* плоскости $\widehat{H}$ называем овальную линию, касающуюся абсолюта в двух совпадающих парах мнимо сопряженных точек.

Теорема 1.1 [18, Теорема 2.4.6]. *Ось гиперцикла, проходящая через его точку X, является полярной прямой относительно абсолюта для общей точки базы гиперцикла и касательной к нему в точке* X.

Теорема 1.2 [18, Теорема 2.4.4]. *Касательная к гиперциклу перпендикулярна оси гиперцикла, проходящей через точку касания.*

Теорема 1.3 [18, Теорема 2.4.1]. *На плоскости* $\widehat{H}$ *гиперцикл с базой* l *является множеством* ω *всех точек плоскости* $\widehat{H}$ *, удаленных от эллиптической прямой на действительное расстояние* h.

Теорема 1.4 [18, Теорема 2.4.2]. *Гиперцикл с центром* S *и высотой* h *является множеством всех точек плоскости* $\widehat{H}$ *, удаленных от точки* S *на расстояние* $r = \frac{i\pi\rho}{2} - h$.

Теорема 1.5 [18, Теорема 2.4.3]. *Гиперцикл на* $\widehat{H}$ *симметричен относительно своего центра, относительно своей базы и относительно каждой своей оси.*

Теорема 1.6 [18, Теорема 2.4.5]. *Касательная к гиперциклу плоскости* $\widehat{H}$ *в каждой его точке разделена точкой касания и базой гиперцикла пополам.*

Теорема 1.7 [18, Теорема 2.4.7]. *На плоскости* $\widehat{H}$ *действительного радиуса кривизны* ρ *касательные гиперцикла* $\omega(l, h)$ *в его диаметрально* *противоположных точках образуют эллиптический угол постоянной величины* $\varphi = 2h/\rho$.

Теорема 1.8 [18, Теорема 2.4.8]. *На плоскости* $\widehat{H}$ *любые две оси гиперцикла* $\omega(l, h)$ *в каждом из квадрантов, образованных этими осями и базой* l , *высекают на абсолютной линии* γ *и на гиперцикле* ω *хорды, принадлежащие прямым, пересекающимися на базе данного гиперцикла.*

Дадим определение инверсии относительно гиперцикла плоскости $\widehat{H}$.

Пусть ω (S; h) – гиперцикл плоскости $\widehat{H}$ с центром S и высотой h, а M – точка плоскости H^2, не принадлежащая гиперциклу ω. Возможны два случая.

1. Пусть M – внутренняя относительно гиперцикла ω точка.

В этом случае через точку M проведем прямую d ортогонально прямой SM. Точку пересечения прямой d с гиперциклом ω обозначим T. Через точку T проведем касательную p к гиперциклу ω. Точку пересечения прямых p и SM обозначим M'.

2. Пусть M – внешняя относительно гиперцикла ω точка.

В этом случае через точку M проведем касательную p к гиперциклу ω. Точку касания прямой p с ω обозначим T. Через точку T проведем прямую d ортогонально прямой SM. Точку пересечения прямых d и SM обозначим M'.

В каждом из допустимых случаев точки M', M называют *инверсными точками* относительно гиперцикла ω.

Преобразование плоскости H^2 при котором каждая точка M переходит в инверсную ей относительно гиперцикла ω точку M', называют *инверсией относительно гиперцикла* ω и обозначают *I*. Гиперцикл ω называют *базовым гиперциклом*, точку S – *центром* инверсии I.

Теорема 2.1 [10, Теорема 3.1]. *Инверсия I относительно гиперцикла ω* (S, h) *плоскости* $\hat{H}$ *обладает следующими свойствами.*

1. *Гиперцикл с центром S и высотой* q *в инверсии I соответствует гиперциклу с центром S и высотой* $\tilde{q}$, *где*

$$\tilde{q} = \frac{\rho}{2}\, ln\, \frac{e^{\frac{2q}{p}} cosh\frac{2h}{p} - 1}{e^{\frac{2q}{p}} - cosh\frac{2h}{p}}.$$

2. *В инверсии I абсолют плоскости* $\widehat{H}$ *соответствует гиперциклу* $\widetilde{\omega}$ *с центром S и высотой* $\tilde{h}$ *, где*

$$\tilde{h} = \frac{\rho}{2}\, ln\, h\frac{2h}{p}\,. \qquad (*)$$

3. *В инверсии I точки кольца между гиперциклами ω* (S, h), $\widetilde{\omega}$ $(S, \tilde{h})$*, где величина* $\tilde{h}$ *определена равенством* (*)*, соответствуют точкам кольца между абсолютом и гиперциклом ω.*
4. *В инверсии I внешние точки относительно гиперцикла* $\widetilde{\omega}$ $(S, \tilde{h})$ *соответствуют идеальным точкам плоскости* $\widehat{H}$ *, т.е. точкам плоскости Лобачевского.*

Теорема 2.2 [10, Теорема 3.2]**.** *При инверсии относительно гиперцикла прямая плоскости* $\widehat{H}$*соответствует себе тогда и только тогда, когда она проходит через центр инверсии.*

В целях визуализации объектов гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны применяем метод, предложенный в работе [23].

В качестве изображения абсолюта гиперболической плоскости положительной кривизны $\widehat{H}$ используем единичную окружность евклидовой плоскости с центром в начале координат. Чтобы вывести в евклидовых координатах формулы инверсии I относительно гиперцикла, применим формулы аналитического задания инверсии из второго раздела работы:

$$\lambda x_1' = x_1, \qquad \lambda x_2' = x_2, \qquad \lambda x_3' = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3}\, tant^2\, \frac{h}{\rho}.$$

Удалим координатную прямую A_1 , A_2 канонического репера в бесконечность. Этому переходу соответствуют формулы

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}\,.$$

Тогда

$$\frac{\lambda x_1'}{\lambda x_3'}=\frac{x_1}{\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2}tant^2\frac{h}{\rho}}=\frac{x_1\cdot x_3}{\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2}tant^2\frac{h}{\rho}}=\frac{\frac{x_1}{x_3}cth^2\frac{h}{\rho}}{\frac{x_1^2}{x_3^2}+\frac{x_2^2}{x_3^2}}=\frac{xcth^2\frac{h}{\rho}}{x^2+y^2}.$$

Аналогично получаем выражение для отношения $\frac{\lambda x_2'}{\lambda x_3'}$. Следовательно,

$$x'=\frac{x}{x^2+y^2}cth^2\frac{h}{\rho},\ \ y'=\frac{y}{x^2+y^2}cth^2\frac{h}{\rho}. \qquad (**)$$

Задаем абсолют и базу инверсии уравнениями:

$$\gamma: x^2+y^2=1 \qquad\qquad \omega: x^2+y^2=cth^2 3.$$

Будем искать образы прямых плоскости в заданной инверсии. Каждую прямую задаем уравнением $x=c$. Так как инверсия – инволюционное преобразование, то образы и прообразы можем поменять местами и тогда из формулы (**) получим:

$$x=\frac{x'}{(x')^2+(y')^2}cth^2\frac{h}{\rho},\qquad y=\frac{y'}{(x')^2+(y')^2}cth^2\frac{h}{\rho}. \qquad (***)$$

Преобразуя прямую x = c по формулам (***), находим

$$c=\frac{x'}{(x')^2+(y')^2}cth^2\frac{h}{\rho},\qquad (x')^2+(y')^2=\frac{x'cth^2\frac{h}{\rho}}{c}.$$

Итак, получаем уравнение образа прямой плоскости $\widehat{H}$, изображенной на евклидовой плоскости прямой $x=c$, при инверсии *I*:

$$x^2+y^2-\frac{x\,cth^2\frac{h}{\rho}}{c}=0.$$

При изображении объектов считаем, что радиус кривизны плоскости $\widehat{H}$ равен 1, а высота базисного гиперцикла равна 3.

Рассмотрим несколько случаев, соответствующих значениям:

1) c =1/2; 2) c = 1; 3) c = 2 > cth $\frac{h}{\rho}$.

Построим на графике следующие фигуры.

1. Изображение абсолюта – единичная окружность, заданная уравнением

$$x^2+y^2=1.$$

2. Изображение базисного гиперцикла инверсии – окружность с центром в начале координат и радиусом cth 3:

$$x^2 + y^2 = cth^2 3.$$

5. Прямую l, которая при c < 1 изображает гиперболическую, при c = 1 – параболическую и при c >1 – эллиптическую прямую.

6. Изображение образа прямой при инверсии – окружность с центром на оси 0x, касающуюся оси 0y.

Строим графики с применением онлайн-ресурса Mathematikam.ru и средствами Wolfram Mathematica. Приведем в качестве примера Рисунок 23.

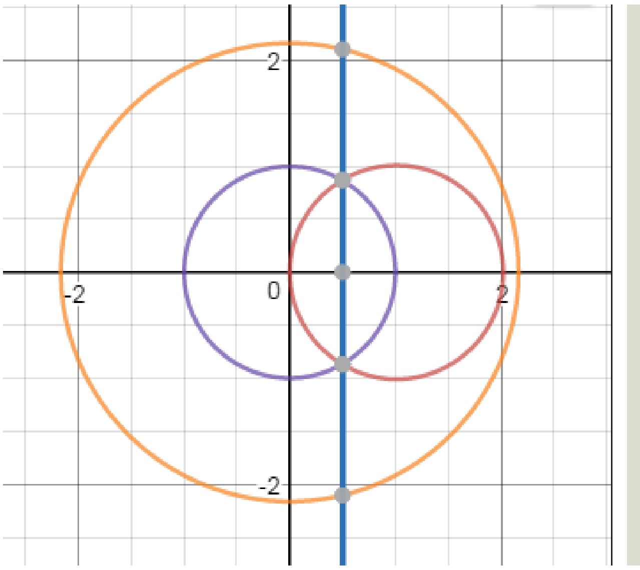

Рисунок 23 – Гиперцикл ω, абсолют γ , прямая l и ее образ l' при инверсии I, с = ½

Список используемых в работе источников

1 Атанасян, Л. С. Геометрия : в 2 ч. Ч. 1: Геометрия / Л. С. Атанасян, В.Т.Базылев. М. : Просвещение, 1986. 336 с.

2 Бакельман, И. Я. Инверсия / И. Я. Бакельман. М. : Наука, 1966. 77 с.

3 Ефимов, Н. В. Высшая геометрия / Н. В. Ефимов. 7-е изд. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 584 с.

4 Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии : учебник для вузов / Н. В. Ефимов. 11-е изд., стереотип. М. : Наука, 1972. 272 с.

5 Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. 4-изд. перераб. и доп. М. : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. 749 с.

6 Савелов, А. А. Плоские кривые : Систематика, свойства, применения (справочное руководство) / А.А. Савелов. М. : ФИЗМАТЛИТ, 1960. 294 с.

7 Тайманов, И. А. Преобразование Мутара двумерных операторов Дирака и геометрия Мебиуса / И. А. Тайманов // Матем. заметки, 2015. Т. 97, вып. 1. С. 129-141.

8 Розенфельд, Б. А. Неевклидовы пространства / Б. А. Розенфельд. М. : Наука, 1969. 548 с.

9 Розенфельд, Б. А. Неевклидовы геометрии / Б. А. Розенфельд. М. : ГИТТЛ, 1955. 744 с.

10 Romakina, L. N. Inversion respect to a hypercycle of a hyperbolic plane of positive curvature / L. N. Romakina // J. of Geom., 2016. V. 107, iss. 1. P. 137-149.

11 Horváth, Á. G. Malfattis problem on the hyperbolic plane / Á. G. Horvath // Stud. Sci. Math., 2014. V. 51, iss. 2. P. 201-212.

12 Molnár, E. Inversion auf der Idealebene der Bachmannschen metrischen Ebene / E. Molnar // Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1981. V. 37, iss. 4. P. 451-470.

13 Мехтиева, С. М. Построение траекторий точек генерирующей прямой в движении Кардана / С. М. Мехтиева // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании : тез. докл. IX Междунар. шк.-конф. для студ., аспирантов и молодых ученых. Уфа : РИЦ БашГУ, 2016. С. 369.

14 Ромакина, Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Часть 1: Тригонометрия / Л. Н. Ромакина. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. 244 с.

15 Розенфельд, Б. А. Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства / Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский. М. : МЦНМО, 2003. 560 с.

16 Busemann, H. Projective Geometry and Projective Metrics / H. Busemann, P. J. Kelly. New York : Academic Press Inc., 1953. 231 p.

17 Ромакина, Л. Н. Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер., 2012. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 12, вып. 3. С. 37-44.

18 Ромакина, Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Часть 2: Преобразования и простые разбиения / Л. Н. Ромакина // Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. 274 с.

19 Ромакина, Л. Н. Циклы гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2013. Т. 415, С. 137-162.

20 Ромакина, Л. Н. Длина дуги орицикла гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Математика. Механика, 2014. С. 58-61.

21 Ромакина, Л. Н. Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Дальневост. матем. журн., 2013. Т. 13, вып. 1. С. 127-147.

22 Ромакина, Л. Н. К теории площадей гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Publications de L'institut Mathematique Nouvelle serie, 2016. V. 99, iss. 113. C.139-154.

23 Romakina L. Svetlana Ribbons With Intersecting Axes in a Hyperbolic Plane of Positive Curvature / L. Romakina // J. for Geom. and Graph., 2016. V. 20, No 2. P. 209-224.

24 WolframProgrammingLab [Электронный ресурс] URL: https://lab.open.wolframcloud.com/app/ (дата обращения: 20.04.2017). Загл. с экрана. Яз. англ.

25 WolframLanguage System «DocumentationCenter»[Электронный ресурс] URL: http://reference.wolfram.com/language/ (дата обращения: 20.04.2017). Загл. с экрана. Яз. англ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследована инверсия относительно гиперцикла на гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны. Определены образы прямых и некоторых кривых второго порядка. Предложена визуализация исследованных объектов. В дальнейшем материалы работы могут быть использованы в исследовании инверсий относительно орициклов, гиперболических и эллиптических циклов плоскости $\widehat{H}$, при изучении нелинейных преобразований других типов на данной плоскости, а также при обучении студентов-математиков в рамках спецкурсов по гиперболическим геометриям.