Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Метрические соотношения в трехреберниках гиперболической плоскости положительной кривизны

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

ФЁДОРОВА ИВАНА ВЛАДМИРОВИЧА
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________________________ Л.Н,РОМАКИНА
должность, уч. степень, уч. звание подпись, ,дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ-мат. наук, профессор ________________________ В.В.РОЗЕН
должность, уч. степень, уч.эвание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2017 год

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Гиперболическую плоскость $\widehat{H}$ положительной кривизны рассматриваем в проективной модели Кэли-Клейна на внешней относительно овальной линии γ области проективной плоскости P_2, где в качестве прямых приняты прямые трех типов [1, 16]. Плоскость $\widehat{H}$ как собственная входит в гиперболическое пространство $\widehat{H}^3$ положительной кривизны, которое можно использовать при моделировании поведения элементарных частиц атома [26]. В такой модели абсолют пространства будет интерпретацией атомного ядра, а сечение пространства $\widehat{H}^3$ плоскостью типа $\widehat{H}$ – двумерной атомной моделью. Траектории электронов в ней можно смоделировать с помощью гиперциклов плоскости $\widehat{H}$. Исследование различных объектов плоскости $\widehat{H}$, в частности, трехреберников, обеспечивает формирование новой геометрической теории, в связи с чем тема исследования представляется актуальной.

Цели и задачи работы. Цель магистерской работы – получить аналоги теоремы Стюарта в плоскости $\widehat{H}$ и как следствие из них найти формулы для вычисления длин медиан трехреберников типов $eee(I)$ и $eee(III)$.

В рамках работы решены следующие **задачи:** изучены основные факты геометрии плоскости $\widehat{H}$ в модели Кэли–Клейна; подробно изучены тригонометрия плоскости $\widehat{H}$, в частности, аналоги теорем синусов и косинусов, определение инвариантов пар объектов; кратко изложены основы геометрии плоскости $\widehat{H}$ с визуализацией некоторых объектов средствами GeoGebra; доказаны аналоги теоремы Стюарта и следствия из них.

Структура работы. Магистерская работа состоит из введения, трех разделов (Основы геометрии плоскости $\widehat{H}$, Трехвершинники плоскости $\widehat{H}$, Решение трехреберников типов eee(I) и eee(III)), заключения и списка использованных источников, содержащего 31 наименование.

Краткая характеристика материалов работы. Введение работы содержит краткий исторический обзор развития геометрии плоскости $\widehat{H}$, обоснование актуальности темы исследования и характеристику работы. Вводная часть работы, включающая в себя первые два раздела, имеет реферативный характер, самостоятельное исследование описано в разделе 3. В первом разделе введены основные понятия геометрии плоскости $\widehat{H}$, представлены классификации отрезков и углов данной плоскости, способы их измерения. Во втором разделе описаны трехвершинники. Приведены их классификация, определение трехреберников, основные свойства трехреберников. В третьем разделе доказаны аналоги теоремы Стюарта для трехреберников типов *eee*(*I*) и *eee*(*III*) и следствия из них.

Научная новизна и значимость работы. Совместно с научным руководителем доказаны и опубликованы аналоги теоремы Стюарта для трехреберников типов *eee(I)* и *eee(III)*, а также первые следствия из них. Полученные результаты существенно дополняют тригонометрию исследуемой плоскости и предоставляют способы и приемы доказательств аналогичных утверждений для трехреберников других типов.

Положения, выносимые на защиту.

Теорема 3.1.1 [1, Теорема 2.1] (Аналоги теоремы Стюарта). *Пусть на плоскости $\widehat{H}$ длины ребер трехреберника ABC типа eee(I) или eee(III) удовлетворяют условия $|AB| = c$, $|BC| = a$ и $|AC| = b$, а точка D разбивает ребро BC на отрезки длиной a_b и a_c, считая от вершины C. Если прямая AD эллиптическая (гиперболическая), а ее часть θ, принадлежащая внутренности трехреберника ABC, имеет длину d, то выполняется соотношение*

$$cos\frac{b}{\rho}sin\frac{a_c}{\rho}+cos\frac{c}{\rho}sin\frac{a_b}{\rho}=cos\frac{b}{\rho}sin\frac{a}{\rho} \tag{3.1}$$

$$\left(cos\frac{b}{\rho}sin\frac{a_c}{\rho}+cos\frac{c}{\rho}sin\frac{a_b}{\rho}=ch\frac{d}{\rho}sin\frac{a}{\rho}\right). \tag{3.2}$$

Если прямая AD параболическая, то справедливо соотношение

$$cos\frac{b}{\rho}sin\frac{a_c}{\rho}+cos\frac{c}{\rho}sin\frac{a_b}{\rho}=\varepsilon\, sin\frac{a}{\rho}\ , \tag{3.3}$$

где $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$), если ABC трехреберник типа eee(I) (eee(III)).

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Абсолютом, по Кэли [30], называется фигура, инвариантная во всех преобразованиях рассматриваемой плоскости. *Фундаментальной группой преобразований* плоскости называется группа проективных автоморфизмов абсолюта данной плоскости [1, 3, 12]. *Гиперболической плоскостью* $\widehat{H}$ *положительной кривизны* называется внешняя относительно абсолютной овальной линии γ область расширенной гиперболической плоскости H^2, причем прямыми являются эллиптические прямые и части гиперболических и параболических прямых, принадлежащие данной области [1].

С помощью абсолюта на плоскости $\widehat{H}$ вводится измерение расстояний между точками. В зависимости от типа прямой, содержащей две данные точки, измерение может быть эллиптическим или гиперболическим. Для двух точек на параболической прямой инварианта фундаментальной группы плоскости $\widehat{H}$ не существует. Все углы плоскости $\widehat{H}$ относятся к 15 типам, углы шести типов измеримы, углы трех типов имеют вещественные меры (Таблица 1).

Таблица 1 – Меры углов плоскости $\widehat{H}$

<table>
<tr><th rowspan="2">№</th><th rowspan="2">Тип угла</th><th rowspan="2">Мера υ ($\tilde{\upsilon}$) угла $\widehat{ab}$</th><th rowspan="2">Тип пучка</th><th colspan="2">Тип прямой</th></tr>
<tr><th>a</th><th>b</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Валиана</td><td>–</td><td rowspan="2">Г</td><td rowspan="2">П</td><td rowspan="2">П</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Полуковалиана</td><td>–</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Гиперболический флаг</td><td>–</td><td rowspan="2">Г</td><td rowspan="3">П</td><td rowspan="3">Г</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Гиперболический псевдофлаг</td><td>–</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Параболический флаг</td><td>–</td><td>П</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Эллиптический флаг</td><td>–</td><td rowspan="2">Г</td><td rowspan="2">П</td><td rowspan="2">Э</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Эллиптический псевдофлаг</td><td>–</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Полуплоскость</td><td>$\upsilon \in [0; \pi]$</td><td>Э</td><td rowspan="5">Г</td><td rowspan="5">Г</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Гиперболический угол</td><td>$\upsilon \in \mathbb{R}_+$</td><td rowspan="2">Г</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Гиперболический псевдоугол</td><td>$\tilde{\upsilon} = i\pi + \upsilon,\ \upsilon \in \mathbb{R}_+$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Полоса</td><td>–</td><td rowspan="2">П</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Псевдополоса</td><td>–</td></tr>
<tr><td>13</td><td>Квазиугол</td><td>$\tilde{\upsilon} = k\upsilon + i\pi / 2,\ \upsilon \in \mathbb{R}_+$,
для h–квазиугла $k = 1$,
для e–квазиугла $k = -1$,
для прямого квазиугла $k = 0$</td><td>Г</td><td>Г</td><td>Э</td></tr>
<tr><td>14</td><td>Эллиптический угол</td><td>$\upsilon \in \mathbb{R}_+$</td><td rowspan="2">Г</td><td rowspan="2">Э</td><td rowspan="2">Э</td></tr>
<tr><td>15</td><td>Эллиптический псевдоугол</td><td>$\tilde{\upsilon} = i\pi - \upsilon,\ \upsilon \in \mathbb{R}_+$</td></tr>
</table>

Трехвершинником плоскости $\widehat{H}$ называют совокупность трех точек общего положения плоскости $\widehat{H}$, называемых *вершинами*, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки, называемых *ребрами*. Прямые, содержащие отрезки, называют *сторонами* трехвершинника. Каждые две стороны трехвершинника разбивают плоскость $\widehat{H}$ на две или три части. Ту из этих частей, которая содержит не принадлежащее данным сторонам ребро трехвершинника, называют *углом* трехвершинника, *противолежащим* указанному ребру. *Трехреберником* называют трехвершинник плоскости $\widehat{H}$, обладающий внутренностью.

Трехреберниками являются трехвершинники следующих десяти типов: *eee*(*I*), *eee*(*III*), *eeh*(*I*), *ehh*(*I*), *hhh*(*I*), *eep*(*I*), *ehp*(*I*), *epp*(*I*), *hhp(I)*, *hpp*(*I*), где символы *e*, *h*, и *p* обозначают эллиптический, гиперболический и, соответственно, параболический тип ребра трехвершинника.

Теорема 2.3.1 [13, Теорема 5.4.1]. *На гиперболической плоскости $\widehat{H}$ действительного радиуса кривизны ρ справедливы следующие утверждения:*

1) *трехвершинник типа eee(I) является трехреберником;*

2) *при расширении плоскости $\widehat{H}$ ее абсолютом внутренность трехвершинника типа eee(I) не содержит абсолют;*

3) *по крайней мере одно из ребер трехвершинника типа eee(I), противолежащих эллиптическому углу, является коротким;*

4) *если в трехвершиннике типа eee(I) одно из ребер, противолежащих эллиптическому углу, не является коротким, то ребро данного трехвершинника, противолежащее эллиптическому псевдоуглу, является длинным;*

5) *в трехвершиннике ABC типа eee(I)* с *эллиптическими углами B, C и эллиптическим псевдоуглом* $\overline{\mathrm{A}}$ *имеют место соотношения:*

$$cos\frac{\bar{a}}{\rho} = cos\frac{\tilde{b}}{\rho}\ cos\frac{\tilde{c}}{\rho} + sin\frac{\tilde{b}}{\rho}\ sin\frac{\tilde{c}}{\rho}\ ch\,\bar{A}, \tag{2.1}$$

$$cos\frac{\tilde{c}}{\rho} = cos\frac{\tilde{b}}{\rho}\ cos\frac{\bar{a}}{\rho} + sin\frac{\tilde{b}}{\rho}\ sin\frac{\bar{a}}{\rho}\ ch\,C, \tag{2.2}$$

$$ch\,\bar{A} = -ch\,B\,ch\,C - sh\,B\,sh\,C\,cos\frac{\bar{a}}{\rho}, \tag{2.3}$$

$$ch\,C = -ch\,\bar{A}\,ch\,B - sh\,\bar{A}\,sh\,B\,cos\frac{\tilde{c}}{\rho}, \tag{2.4}$$

$$\frac{sin\frac{\bar{a}}{\rho}}{sh\bar{A}} = \frac{sin\frac{\tilde{b}}{\rho}}{sh\,B} = \frac{sin\frac{\tilde{c}}{\rho}}{sh\,C}\ . \tag{2.5}$$

Теорема 2.4.1 [13, Теорема 5.4.3]. *На гиперболической плоскости $\widehat{H}$ действительного радиуса кривизны ρ справедливы следующие утверждения:*

1) *трехвершинник типа eee(III) является трехреберником;*

2) *при расширении плоскости $\widehat{H}$ ее абсолютом внутренность трехвершинника типа eee(III) содержит абсолют;*

3) *по крайней мере два ребра трехвершинника типа eee(III) являются длинными;*

4) *для трехвершинника ABC типа eee(III) справедливы формулы:*

$$cos\frac{\bar{a}}{\rho} = cos\frac{\bar{b}}{\rho}\,cos\frac{\bar{c}}{\rho} + sin\frac{\bar{b}}{\rho}\,sin\frac{\bar{c}}{\rho}\,ch\,\bar{A}, \tag{2.6}$$

$$ch\,\bar{A} = -ch\,\bar{B}\,ch\,\bar{C} - sh\,\bar{B}\,sh\,\bar{C}\,cos\frac{\bar{a}}{\rho}, \tag{2.7}$$

$$\frac{sin\frac{\bar{a}}{\rho}}{sh\bar{A}} = \frac{sin\frac{\bar{b}}{\rho}}{sh\,\bar{B}} = \frac{sin\frac{\bar{c}}{\rho}}{sh\,\bar{C}}\ . \tag{2.8}$$

Теорема 2.5.1 [13, Теорема 5.4.11]. *На гиперболической плоскости $\widehat{H}$ действительного радиуса кривизны ρ справедливы следующие утверждения:*

1) *трехвершинник типа eeh(I) является трехреберником*;

2) *в трехвершиннике ABC типа eeh(I) с гиперболическим ребром c имеют место соотношения*:

$$ch\frac{\tilde{a}}{\rho} = cos\frac{\tilde{b}}{\rho}\,cos\frac{\tilde{c}}{\rho} + sin\frac{\tilde{b}}{\rho}\,sin\frac{\tilde{c}}{\rho}\,ch\,A, \tag{2.9}$$

$$cos\frac{\tilde{b}}{\rho} = cos\frac{\tilde{c}}{\rho}\,ch\frac{\tilde{a}}{\rho} - i\,sin\frac{\tilde{c}}{\rho}\,sin\frac{\tilde{a}}{\rho}\,ch\,B, \tag{2.10}$$

$$ch\, C = -ch\, A\, ch\, B - sh\, A\, sh\, B\, cos\frac{\bar{c}}{\rho}, \tag{2.11}$$

$$ch\, A = -ch\, B\, ch\, C - sh\, B\, sh\, C\, ch\frac{\bar{a}}{\rho}, \tag{2.12}$$

$$\frac{sh\frac{\bar{a}}{\rho}}{sh\, A} = \frac{i\, sin\frac{\bar{b}}{\rho}}{sh\, B} = \frac{i\, sin\frac{\bar{c}}{\rho}}{sh\, C}\,. \tag{2.13}$$

Теорема 3.1.1 [1, Теорема 2.1]. *Пусть на плоскости $\widehat{H}$ длины ребер трехреберника ABC типа eee(I) или eee(III) удовлетворяют условия |AB| = c, |BC| = a и |AC| = b, а точка D разбивает ребро BC на отрезки длиной a_b и a_c, считая от вершины C. Если прямая AD эллиптическая (гиперболическая), а ее часть θ, принадлежащая внутренности трехреберника ABC, имеет длину d, тогда выполняется соотношение*

$$cos\frac{b}{\rho}sin\frac{a_c}{\rho} + cos\frac{c}{\rho}sin\frac{a_b}{\rho} = cos\frac{b}{\rho}sin\frac{a}{\rho} \tag{3.1}$$

$$\left(cos\frac{b}{\rho}sin\frac{a_c}{\rho} + cos\frac{c}{\rho}sin\frac{a_b}{\rho} = ch\frac{d}{\rho}sin\frac{a}{\rho}\right). \tag{3.2}$$

Если прямая AD параболическая, то справедливо соотношение

$$cos\frac{b}{\rho}sin\frac{a_c}{\rho} + cos\frac{c}{\rho}sin\frac{a_b}{\rho} = \varepsilon\, sin\frac{a}{\rho}, \tag{3.3}$$

где ε = 1 (ε = –1), если ABC трехреберник типа eee(I) (eee(III)).

Следствие 3.1.1 [1, Следствие 2.1]. *Длина m_a эллиптической (гиперболической) медианы трехреберника типа eee(I) или eee(III) плоскости $\widehat{H}$, проведенная к ребру длиной a, выражается через длины a, b, c ребер данного трехреберника по формуле*

$$cos\frac{m_a}{\rho} = \frac{cos\frac{b}{\rho} + cos\frac{c}{\rho}}{2\,cos\frac{a}{2\rho}}\ \left(ch\frac{m_a}{\rho} = \frac{cos\frac{b}{\rho} + cos\frac{c}{\rho}}{2\,cos\frac{a}{2\rho}}\right). \tag{3.13}$$

Теорема 3.2.1 [1, Теорема 3.2]. *Пусть в плоскости $\widehat{H}$ точка D лежит на ребре BC трехреберника ABC типа eee(I) или eee(III), а прямая AD разбивает внутренний угол при вершине A на углы величиной A_B, A_C, считая от ребра AB. Если прямая AD непараболическая, а внутренний угол при* *вершине D трехреберника ACD, принадлежащего данному трехребернику ABC, имеет меру D_C, то справедливо соотношение*

$$ch\, B\, sh\, A_C - ch\, C\, sh\, A_B = ch\, D_C\, sh\, A. \tag{3.17}$$

Следствие 3.2.1 [1, Следствие 3.2]. *Длина l_a эллиптической (гиперболической) биссектрисы трехреберника типа eee(I) или eee(III) плоскости $\widehat{H}$, проведенная из вершины A, выражается через меры A, B, C внутренних углов данного трехреберника по формуле*

$$cos\frac{l_a}{\rho} = -\frac{cth\frac{A}{2}(ch\, A + ch\, C)}{\sqrt{(ch\, B - ch\, C)^2 - 4ch^2\frac{A}{2}}} \tag{3.22}$$

$$\left(ch\frac{l_a}{\rho} = -\frac{cth\frac{A}{2}(ch\, B + ch\, C)}{\sqrt{(ch\, B - ch\, C)^2 - 4ch^2\frac{A}{2}}}\right). \tag{3.23}$$

Список использованных в работе источников

1 Розенфельд, Б. А. Неевклидовы пространства. / Б. А. Розенфельд. М. : Наука, 1969. 548 с.

2 Розенфельд, Б. А. Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства / Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский. М. : МЦНМО, 2003. 560 с.

3 Каган, В. Ф. Основания геометрии : в 2 ч. Ч. 2 / В. Ф. Каган. М. : ГИТТЛ, 1956. 344 с.

4 Панарин, Я. П. Неевклидовы геометрии с афинной базой / Я.П. Панарин. Киров : Изд-во Киров. гос. пед. ун-та, 1981. 124 с.

5 Розенфельд, Б. А. Симметрические пространства и их геометрические приложения / Б. А. Розенфельд // Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М. : Изд-во иностр. лит., 1949. С. 361–368.

6 Розенфельд, Б. А. Неевклидовы геометрии. / Б. А. Розенфельд. М. : ГИТТЛ, 1955. 744 с.

7 Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. М. : Наука, 1969. 664 с.

8 Вольф, Дж. Пространства постоянной кривизны / Дж. Вольф. М. : Наука, 1982. 480 с.

9 Coxeter, H. S. M. A Geometrical Background for De Sitter's World / H. S. M. Coxeter // Amer. Math. Mon. 1943. Vol. 50, № 4. P. 217–228.

10 Cho, Yun. Trigonometry in extended hyperbolic space and extended de Sitter space / Cho Yun // Bull. Korean Math. Soc. 2009. Vol. 46, № 6. P. 1099–1133.

11 Asmus, Im. Duality between hyperbolic and de Sitter geometry / Asmus Im // J. of Geom. 2009. Vol. 96, № 1–2. P. 11–40.

12 Клейн, Ф. Неевклидова геометрия / Ф. Клейн. М. ; Л. : ОНТИ НКТП СССР, 1936. 432 с.

13 Певзнер, С. Л. Фокально-директориальные свойства кривых 2-го порядка на плоскости Лобачевского / С. Л. Певзнер // Изв. вузов. Матем. 1960. № 6. С. 184–194.

14 Певзнер, С. Л. Свойства кривых 2-го порядка на плоскости Лобачевского, двойственные фокально-директориальным / С. Л. Певзнер // Изв. вузов. Матем. 1961. № 5. С. 39–50.

15 Певзнер, С. Л. Детальная классификация нераспадающихся кривых 2-го порядка на плоскости Лобачевского / С. Л. Певзнер // Изв. вузов. Матем. 1962. № 6. С. 85–90.

16 Ромакина, Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны. В 4 ч. Ч. 1. Тригонометрия / Л. Н. Ромакина. Саратов : Изд-во Сарат, ун-та, 2013. 244 с.

17 Ромакина, Л. Н. Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Сиб. электрон. матем. изв. 2013. Т. 10. С. 393–407.

18 Ромакина, Л. Н. Конечные замкнутые 3(4)-контуры расширенной гиперболической плоскости / Л. Н. Ромакина // Изв. Сарат. ун-та. Нов.

сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 14–26.

19 Ромакина, Л. Н. Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Дальневост. матем. журн. 2013. Т. 13, вып. 1. С. 127–147.

20 Ромакина, Л. Н. О площади трехреберника на гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Матем. тр. 2014. Т. 17, № 2. С. 14–26.

21 Ромакина, Л. Н. Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны правильными орициклическими n-трапециями // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, № 3. С. 376–416.

22 Ромакина, Л. Н. Аналоги формулы Герона для трехреберников типов $eee(I)$, $eee(III)$ гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Математика. Механика. 2015. Вып. 17. С. 52–55.

23 Ромакина, Л. Н., Чурилова, В.О. Эллиптические орициклические n-реберники плоскости $\widehat{H}$ / Л. Н. Ромакина // Математика. Механика. 2015. Вып. 17. С. 56–59.

24 Ромакина, Л. Н. Площади вписанных в гиперцикл правильных многоугольников гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина // Инновационная наука. 2016. Т. 6, № 3. С. 20–23.

25 Romakina, L. N. The Area of a Generalized Polygon without Parabolic Edges of a Hyperbolic Plane of Positive Curvature / L. N. Romakina // Asian Journal of Mathem. and Comp. Research. 2016. Vol. 10, iss. 4. C. 293–310.

26 Ромакина, Л. Н. Развитие представлений о геометрии окружающего пространства / Л. Н. Ромакина // Евр. Науч. Объед. 2015. № 10. С. 18–21.

27 Ромакина, Л. Н. Решение трехреберников типов $eee(I)$ и $eee(III)$ на гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина, И. В. Фёдоров // Матем. обр., 2017. Вып. 1(81). С. 40–47.

28 GeoGebra Math Apps [Электронный ресурс] URL: https://www.geogebra.org/apps/ (дата обращения: 10.03.2017). Загл. с экрана. Яз. англ.
29 GeoGebra Руководство [Электронный ресурс] URL: https://wiki.geogebra.org/ru/ (дата обращения: 10.03.2017). Загл. с экрана. Яз. русс.
30 Кэли, А. Шестой мемуар о формах / А. Кэли // Об основаниях геометрии: Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М. : ГИТТЛ, 1956. С. 222.
31 Клейн, Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа») / Ф. Клейн // Об основаниях геометрии : Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М. : ГИТТЛ, 1956. С. 399.

Список публикаций автора по теме исследования

[1] Ромакина, Л. Н. Решение трехреберников типов $eee(I)$ и $eee(III)$ на гиперболической плоскости положительной кривизны / Л. Н. Ромакина, И. В. Фёдоров // Матем. обр., 2017. Вып. 1(81). С. 40–47.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В магистерской работе были получены аналоги теоремы Стюарта в плоскости $\widehat{H}$ и как следствие из них найдены формулы для вычисления длин медиан трехреберников типов $eee(I)$ и $eee(III)$. Для этого была изучена тригонометрия плоскости плоскости $\widehat{H}$, в частности, аналоги теорем синусов и косинусов, а так же определены инварианты пар объектов. Вместе с тем было проведено краткое изложение основ геометрии плоскости $\widehat{H}$.

Материалы работы могут быть использованы в научных исследованиях и при обучении по курсу гиперболической геометрии.