

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Сложная динамика систем связанных дискретных осцилляторов Рёсслера**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 411 группы  
направления 03.03.01 Прикладные математика и физика  
Факультета нелинейных процессов  
Ивановой Александры Андреевны

Научный руководитель  
доцент, к. ф. – м. н. \_\_\_\_\_ А.В.Савин

Заведующий кафедрой  
профессор, д. ф. – м. н. \_\_\_\_\_ Н.М.Рыскин

Саратов 2017 год

## **Введение**

Динамическая система представляет собой математическую модель некоторого объекта, процесса или явления.

Динамические системы – это такой набор величин, называемых динамическими переменными и характеризующих состояние системы, что их значения в любой последующий момент времени получаются из исходного набора по определенному правилу [1].

Динамические системы, как правило, определяются в терминах дифференциальных уравнений. Эти уравнения описывают поведение системы в течение некоторого периода.

Каждая из основных областей классической физики создала свою модель хаотической динамики: гидромеханика – уравнение Лоренца, строительная механика – осциллятор Дуффинга-Холмса с двумя потенциальными ямами, электротехника – систему Дуффинга-Уэды [2].

Еще одна модель возникла в динамике химических реакций, протекающих в некоторой смеси с перемешиванием. Предложил ее Рёсслер [3].

В этой работе исследуются связанные системы с квазипериодическим поведением. На данный момент такое поведение связанных систем слабо изучено, по сравнению с периодическими и хаотическими колебаниями связанных систем. В основном это из-за того, что в области квазипериодических колебаний встроены языки синхронизации, что значительно искажает картину при исследовании пространства параметров связанных систем.

В настоящей работе в качестве модели системы с квазипериодическим поведением используется модель дискретного осциллятора Рёсслера, полученная из классической модели Рёсслера при помощи метода искусственной дискретизации [4], который заключается в модификации исходной потоковой системы путем замены производных на конечные разности.

**Целью** данной работы является исследование динамики связанных систем с квазипериодическим поведением на примере связанных дискретных осцилляторов Рёсслера.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- Рассчитать ляпуновские показатели для двух связанных дискретных осцилляторов Рёсслера.
- Построить карту ляпуновских показателей для двух связанных дискретных осцилляторов Рёсслера.
- Исследовать динамические режимы плоскости параметров.
- Рассчитать ляпуновские показатели для трех связанных дискретных осцилляторов Рёсслера.
- Построить карту ляпуновских показателей для трех связанных дискретных осцилляторов Рёсслера.
- Исследовать динамические режимы плоскости параметров.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. В главе 1 представлен метод получения дискретного осциллятора Рёсслера, метод расчета ляпуновского показателя и результаты численного моделирования для одного дискретного осциллятора Рёсслера. Во 2 главе представлены результаты численного моделирования для двух связанных дискретных осцилляторов Рёсслера. В 3 главе представлены результаты численного моделирования для трех связанных дискретных осцилляторов Рёсслера. В заключении сформулированы основные результаты и выводы.

В главе 1 введена модель осциллятора Рёсслера и исследована ее динамика.

Для исследования, к системе Рёсслера был применен метод искусственной дискретизации, который заключается в модификации исходной потоковой системы путем замены производных на конечные разности.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, z), \\ \dot{y} &= g(x, y, z), \\ \dot{z} &= u(x, y, z)\end{aligned}\tag{1}$$

выполняя аппроксимацию производных:

$$\begin{aligned}\dot{x} &\rightarrow (x_{n+1} - x_n)/\varepsilon \\ \dot{y} &\rightarrow (y_{n+1} - y_n)/\varepsilon \\ \dot{z} &\rightarrow (z_{n+1} - z_n)/\varepsilon\end{aligned}\tag{2}$$

(здесь  $\varepsilon$  – параметр, который можно назвать параметром дискретизации), можно получить отображение

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \varepsilon f(x_n, y_n, z_n), \\ y_{n+1} &= y_n + \varepsilon g(x_n, y_n, z_n), \\ z_{n+1} &= z_n + \varepsilon u(x_n, y_n, z_n),\end{aligned}\tag{3}$$

Его можно рассматривать как самостоятельную динамическую систему. При этом, как правило, её динамика более сложна и разнообразна, чем динамика потоковой системы-прототипа [4].

Применим способ, рассмотренный выше, к системе Рёсслера [5].

Осциллятор Рёсслера – типичная автоколебательная система, демонстрирующая каскад бифуркаций удвоения периода.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - r)\end{aligned}\tag{4}$$

Применяя метод искусственной дискретизации к системе Рёсслера, получим отображение, которое будем называть дискретным осциллятором Рёсслера [1].

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \varepsilon(y_n - z_n), \\y_{n+1} &= y_n - \varepsilon(x_n - ay_n), \\z_{n+1} &= z_n + \varepsilon b + \varepsilon(x_n - r)z_n,\end{aligned}\tag{5}$$

Так же в этой главе рассматривается динамика дискретного осциллятора Рёсслера. Вычисляя ляпуновские показатели можно идентифицировать различные динамические режимы: периодический, квазипериодический, хаотический. На рис.1. представлена динамика системы в плоскости параметров  $(a;r)$ . Карта ляпуновских показателей демонстрирует различные режимы поведения системы. При разных значениях ляпуновского показателя мы можем видеть различные динамические режимы.

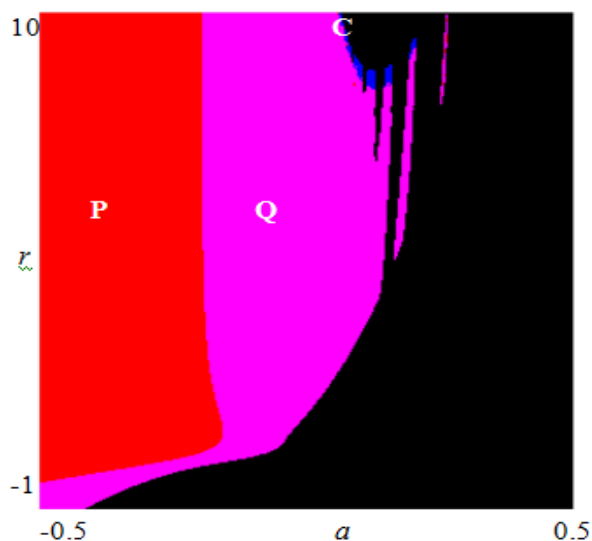


Рис.1. Карта ляпуновских показателей системы при  $\varepsilon=0.1$ ,  $b=0.1$ . Разными цветами показаны разные динамические режимы. Красным – периодический (P), пурпурным – квазипериодический (Q), синим – хаотический (C).

При отрицательном ляпуновском показателе наблюдается периодический режим. При ляпуновском показателе равном нулю наблюдается квазипериодический режим (Q).

При положительном ляпуновском показателе наблюдается хаос (C).

В главе 2 исследуется система двух связанных дискретных осцилляторов Рёсслера (6).

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \varepsilon(y_n + z_n); \\y_{n+1} &= y_n + \varepsilon(x_n + a_1 y_n) + \varepsilon\mu(v_n - y_n); \\z_{n+1} &= z_n + \varepsilon b + \varepsilon(x_n - r)z_n; \\u_{n+1} &= u_n - \varepsilon(v_n + w_n); \\v_{n+1} &= v_n + \varepsilon(u_n + a_2 v_n) + \varepsilon\mu(y_n - v_n); \\w_{n+1} &= w_n + \varepsilon b + \varepsilon(u_n - r)w_n;\end{aligned}\tag{6}$$

Была получена карта ляпуновских показателей системы (рис.4.) в пространстве параметров  $(a_1; a_2)$ .

Зафиксировав параметры  $r, b, e$ , будем менять коэффициент связи  $\mu$ .

Каждому режиму соответствует свой набор ляпуновских показателей.

Когда все ляпуновские показатели отрицательны, наблюдается периодический режим.

Когда два старших ляпуновских показателя равны нулю, наблюдается двухчастотный квазипериодический режим.

Когда три старших ляпуновских показателя равны нулю, наблюдается трехчастотный квазипериодический режим.

Когда старший ляпуновский показатель положительный, наблюдается хаос.

В данной части работы были исследованы аттракторы для разных коэффициентов связи. На рисунках рис.5.-рис.7. приведены аттракторы для разных динамических режимов. На изображениях под буквой *a* мы видим точку, что соответствует периодическому режиму. На изображениях под буквой *б* видим инвариантную кривую, она соответствует двухчастотному квазипериодическому режиму. На картинках под буквой *в* утолщенная инвариантная кривая, соответствующая трехчастотному квазипериодическому режиму. Под буквой *г* мы видим странный аттрактор, который соответствует хаотическому режиму.

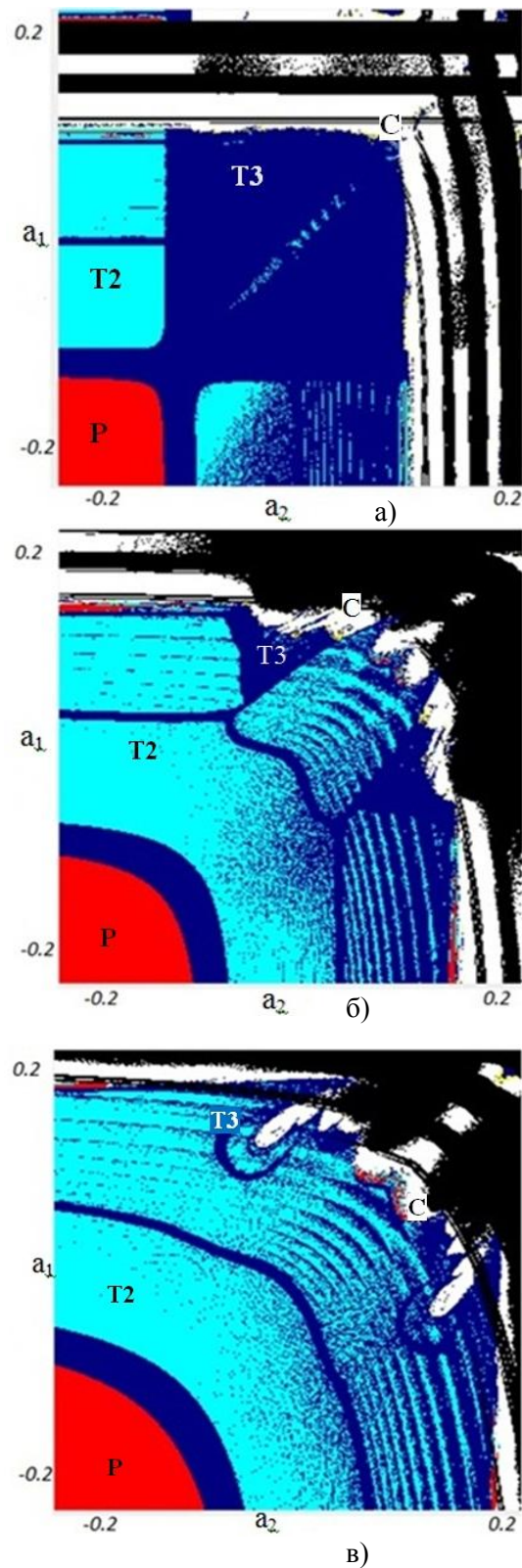


Рис.4. Карта ляпуновских показателей в плоскости параметров  $a_1$ ;  $a_2$  при а)  $\mu=0.01$ , б)  $\mu=0.05$ , в)  $\mu=0.1$ . Разными цветами изображены области динамических режимов. Периодический (P) – красным ( $\lambda_1=-0.032$ ,  $\lambda_2=-0.032$ ), двухчастотный квазипериодический (T2) – голубым ( $\lambda_1=0.00012$ ,  $\lambda_2=-0.047$ ), трехчастотный квазипериодический (T3) – синим ( $\lambda_1=0.0002$ ,  $\lambda_2=2.18 \cdot 10^{-6}$ ), хаотический (C) – белым ( $\lambda_1=0.046$ ,  $\lambda_2=0.000062$ ).

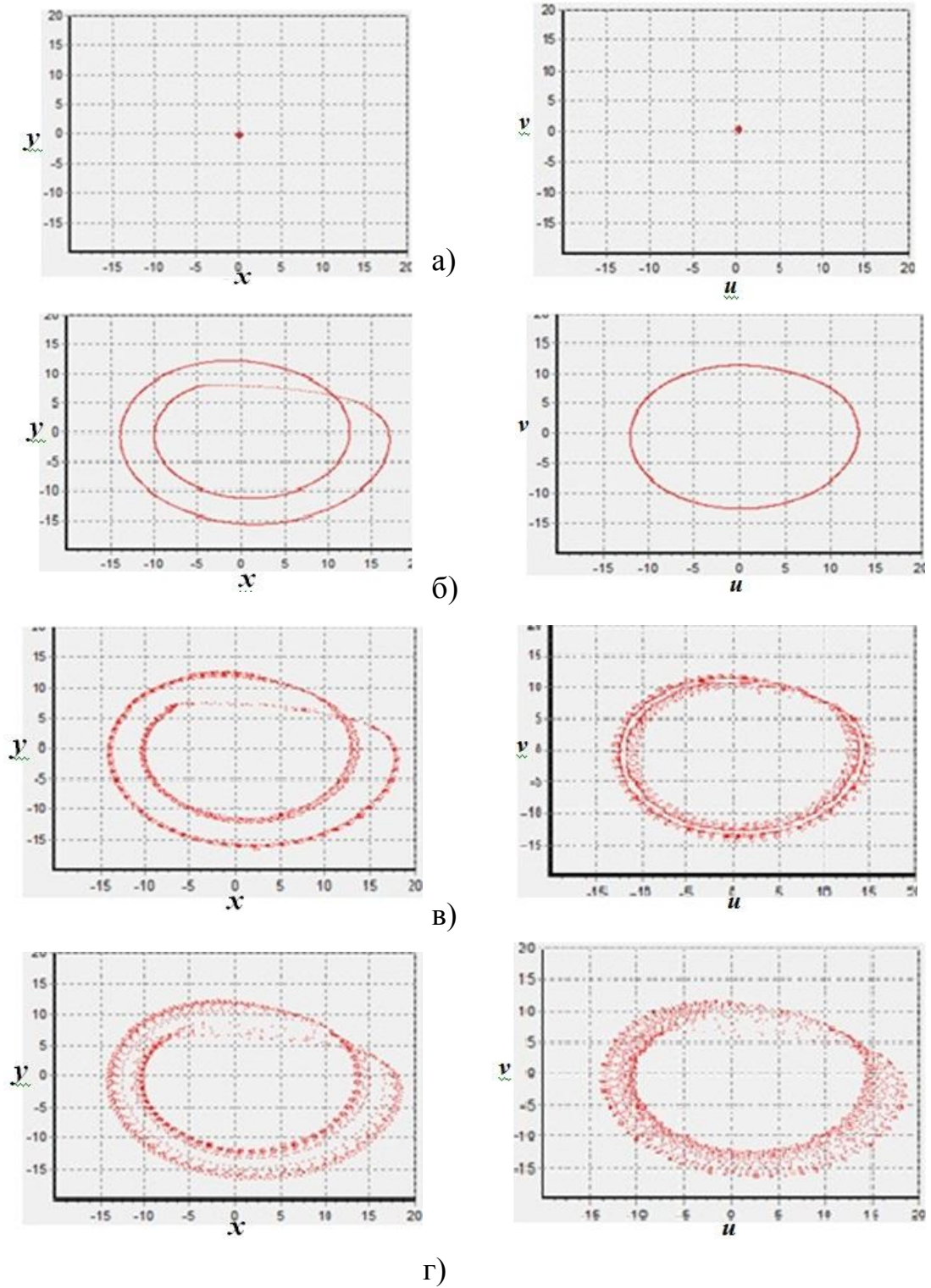


Рис.5. Аттрактор при  $\mu=0.01$ ,  $b=\varepsilon=0.1$ ,  $\gamma= 8.5$ . а) периодический режим, б) двухчастотный квазипериодический режим, в) трехчастотный квазипериодический режим, г) хаотический режим.



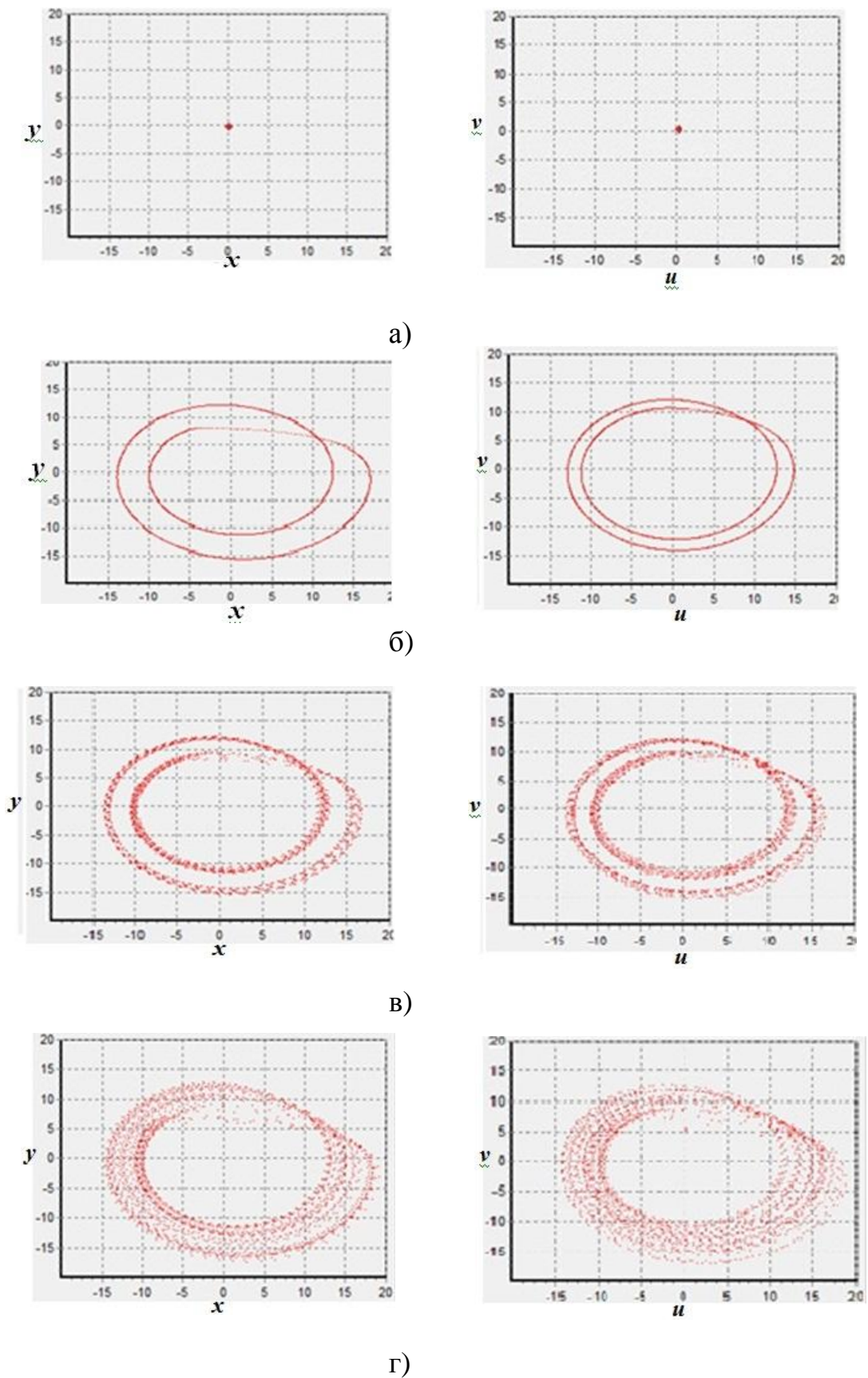
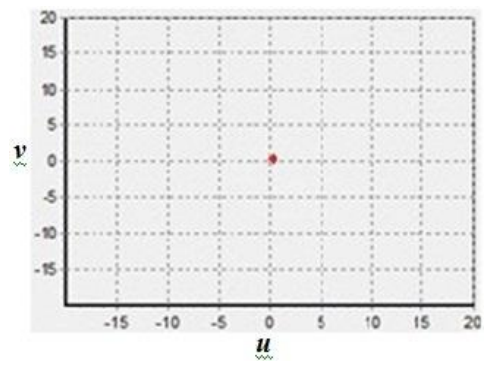
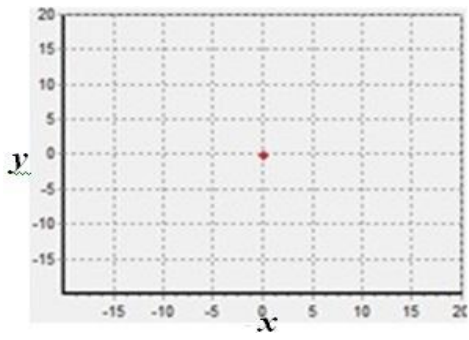
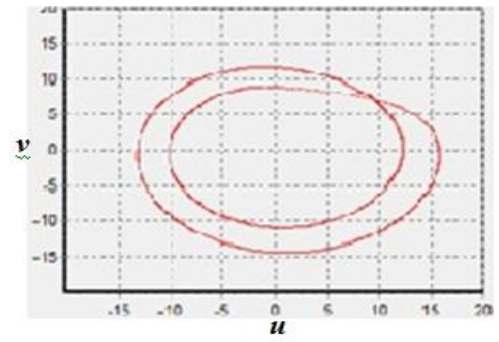
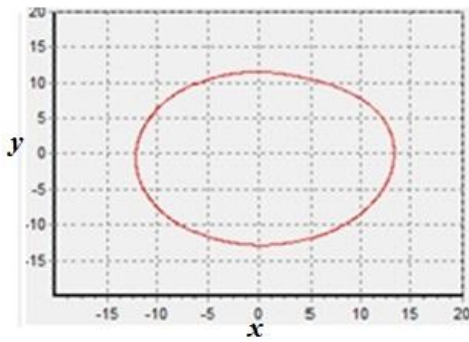


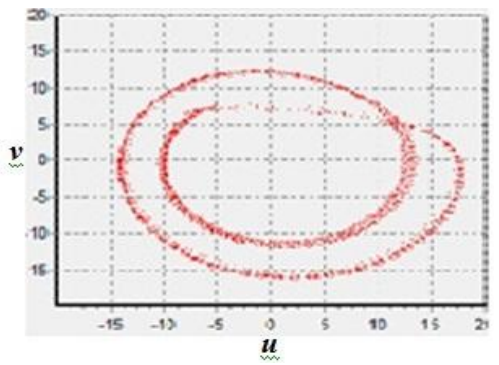
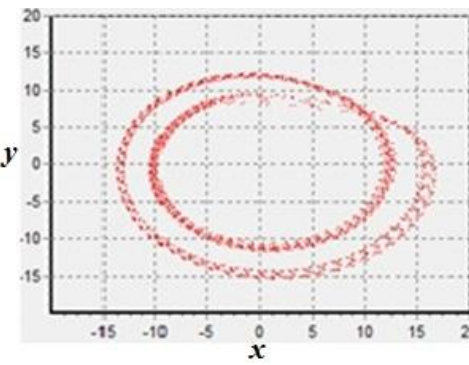
Рис.6. Аттрактор при  $\mu=0.05$ ,  $b=\varepsilon=0.1$ ,  $r=8.5$ . а) периодический режим, б) двухчастотный квазипериодический режим, в) трехчастотный квазипериодический режим, г) хаотический режим.



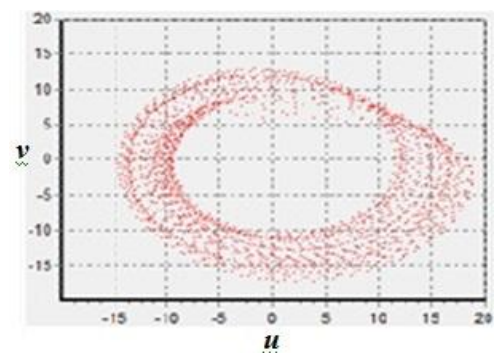
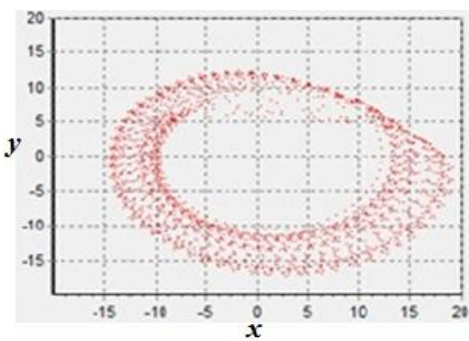
а)



б)



в)



г)

Рис.7. Аттрактор при  $\mu=0.1$ ,  $b=\varepsilon=0.1$ ,  $r=8.5$ . а) периодический режим, б) двухчастотный квазипериодический режим, в) трехчастотный квазипериодический режим, г) хаотический режим.

В главе 3 рассматривалась система трех связанных дискретных осцилляторов Рёсслера.

Осцилляторы соединялись по типу «цепь».

Такая система имеет вид (7):

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n - \varepsilon(y_n + z_n); \\
 y_{n+1} &= y_n + \varepsilon(x_n + a_1 y_n) + \varepsilon\mu(v_n - y_n); \\
 z_{n+1} &= z_n + \varepsilon b + \varepsilon(x_n - r)z_n; \\
 u_{n+1} &= u_n - \varepsilon(v_n + w_n); \\
 v_{n+1} &= v_n + \varepsilon(u_n + a_2 v_n) + \varepsilon\mu(y_n + p_n - 2v_n); \\
 w_{n+1} &= w_n + \varepsilon b + \varepsilon(u_n - r)w_n; \\
 q_{n+1} &= q_n - \varepsilon(p_n + g_n); \\
 p_{n+1} &= p_n + \varepsilon(q_n + a_3 p_n) + \varepsilon\mu(v_n - p_n); \\
 g_{n+1} &= g_n + \varepsilon b + \varepsilon(q_n - r)g_n;
 \end{aligned} \tag{7}$$

Была построена карта ляпуновских показателей в плоскости параметров  $(a_1; a_2)$  (Рис.8.).

Зафиксировав параметры  $r, b, e, a_3$ , будем менять коэффициент связи  $\mu$ . Параметр  $a_3$  принимался равным  $-0.03$ , что соответствует квазипериодическому режиму в автономном дискретном осцилляторе Рёсслера.

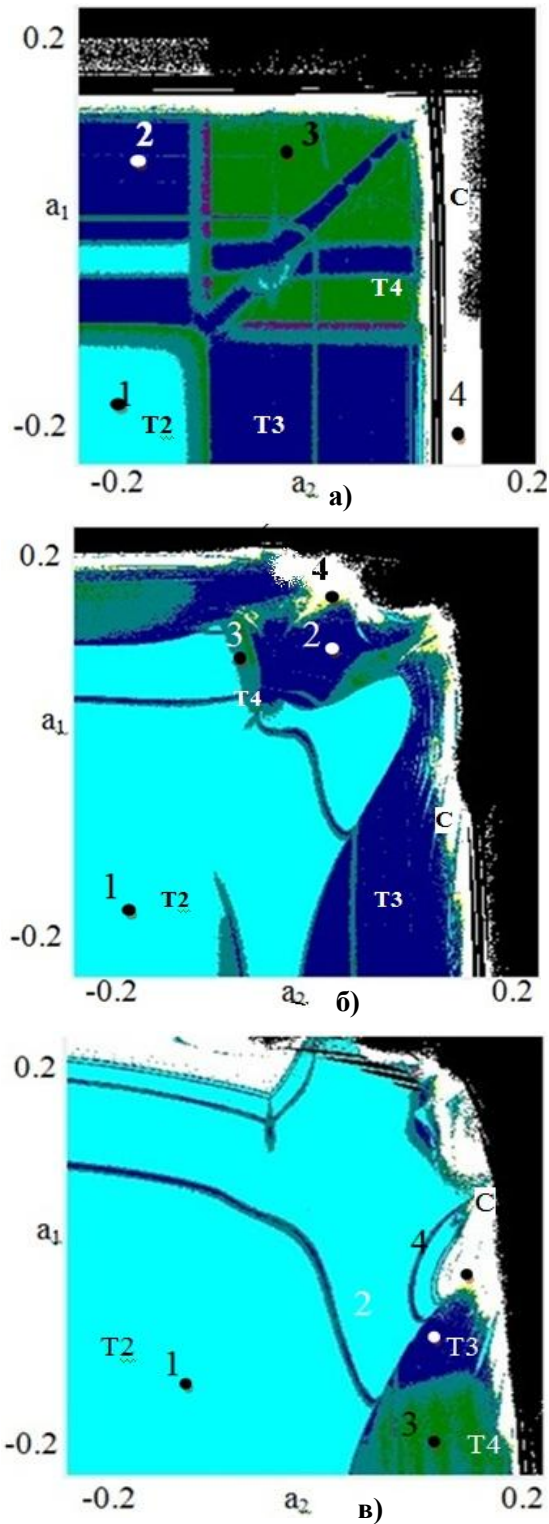


Рис.8. Карта ляпуновских показателей в плоскости параметров  $a_1; a_2$  при  $a_3=-0.03$ . В точках, изображенных на картах, строились аттракторы (рис.9-рис.11) а)  $\mu=0.01$ , б)  $\mu=0.05$ , в)  $\mu=0.1$ . Каждой области соответствует свой цвет. Голубой (T2) – двухчастотный квазипериодический режим ( $\lambda_1=0.0001$ ,  $\lambda_2=-0.001$ ,  $\lambda_3=-0.0028$ ), синий (T3) - трехчастотный квазипериодический режим ( $\lambda_1=0.00011$ ,  $\lambda_2=7.054 \cdot 10^{-5}$ ,  $\lambda_3=-0.0011$ ), зеленый (T4) - четырехчастотный квазипериодический режим ( $\lambda_1=9.51 \cdot 10^{-5}$ ,  $\lambda_2=-6.061 \cdot 10^{-5}$ ,  $\lambda_3=3.57 \cdot 10^{-5}$ ), белый (C) - хаотический режим ( $\lambda_1=0.0073$ ,  $\lambda_2=0.00014$ ,  $\lambda_3=4.63 \cdot 10^{-5}$ ).

Каждому режиму соответствует свой набор ляпуновских показателей

Когда один старший ляпуновских показателей равен нулю, наблюдается двухчастотный квазипериодический режим.

Когда два старших ляпуновских показателя равны нулю, наблюдается трёхчастотный квазипериодический режим.

Когда три старших ляпуновских показателя равны нулю, наблюдается четырёхчастотный квазипериодический режим.

Когда старший ляпуновский показатель положительный, наблюдается хаос.

В разных областях карт существуют разные режимы. Посмотрим, как выглядят аттракторы в разных точках плоскости параметров.

На рис.9., рис.10., рис.11 изображены аттракторы системы трёх связанных дискретных осцилляторов Рёсслера. На рисунках под буквой *a* мы видим двухчастотный квазипериодический режим. На рисунке под буквой *б* трёхчастотный квазипериодический режим. На рисунке под буквой *в* четырёхчастотный квазипериодический режим. На рисунке под буквой *г* хаотический режим.

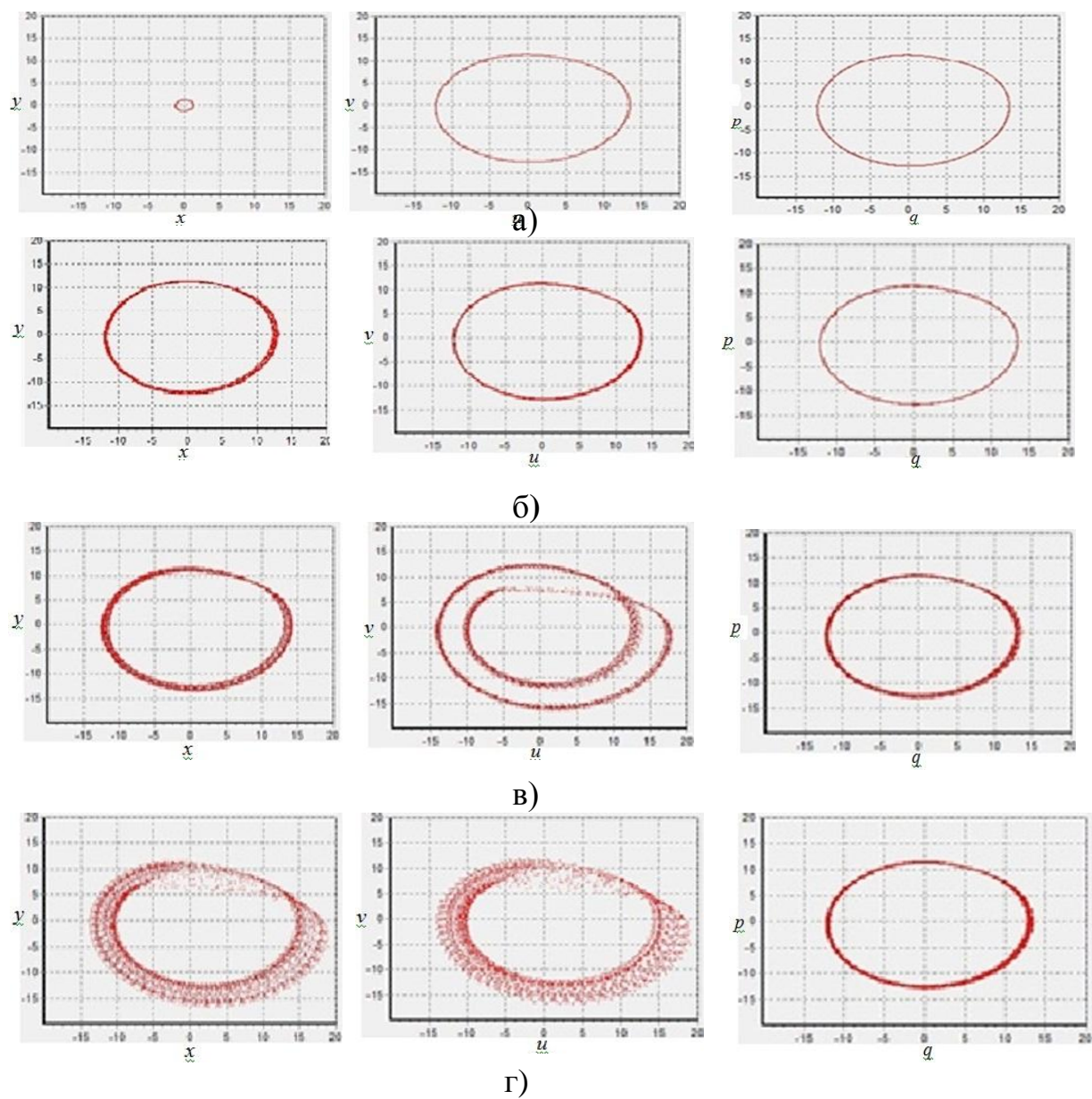
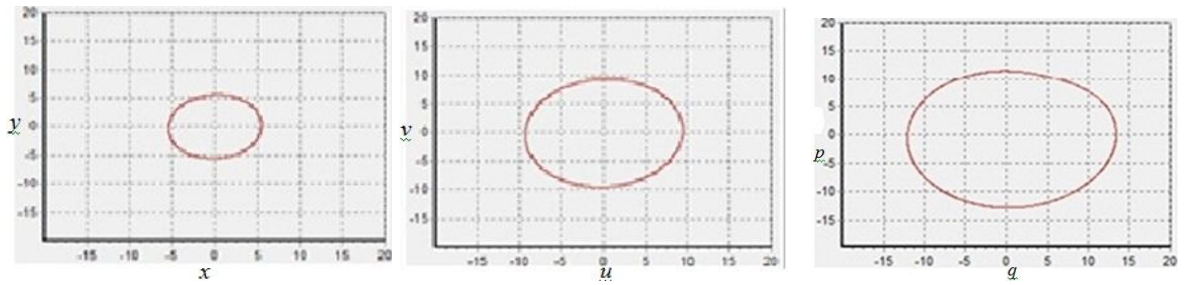
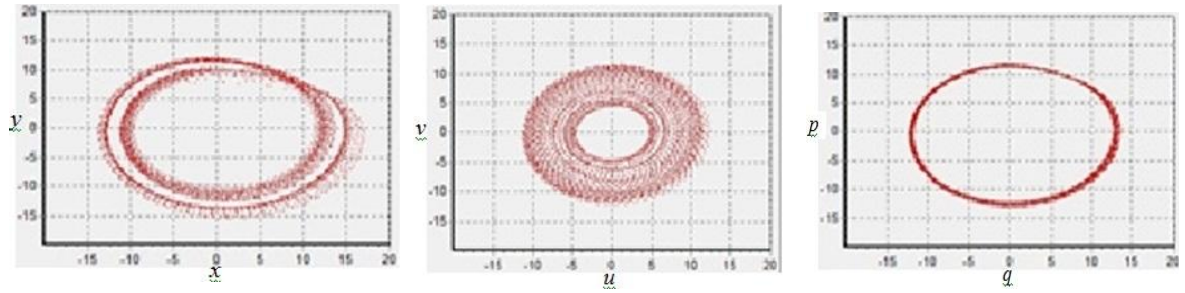


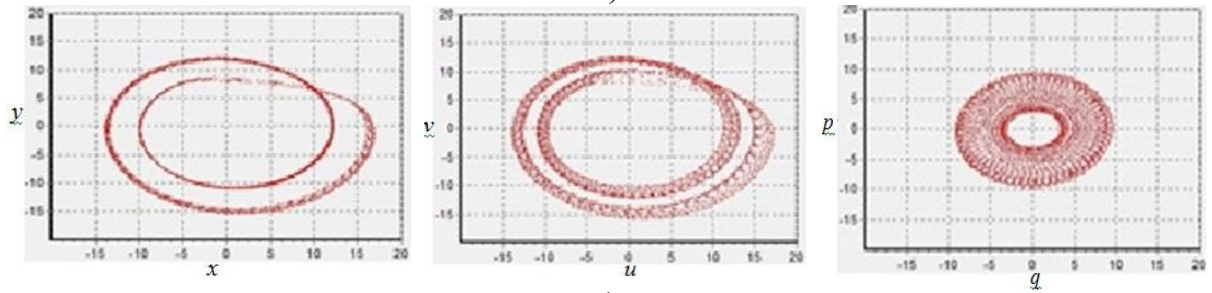
Рис.9.Аттрактор при  $\mu=0.01$ ,  $b=\varepsilon=0.1$ ,  $\gamma= 8.5$ ,  $a_3=-0.03$  в точках карты заданных на рис.8а. а) двухчастотный квазипериодический режим (точка 1), б) трёхчастотный квазипериодический режим (точка 2), в) четырёхчастотный квазипериодический режим (точка 3), г) хаотический режим (точка 4).



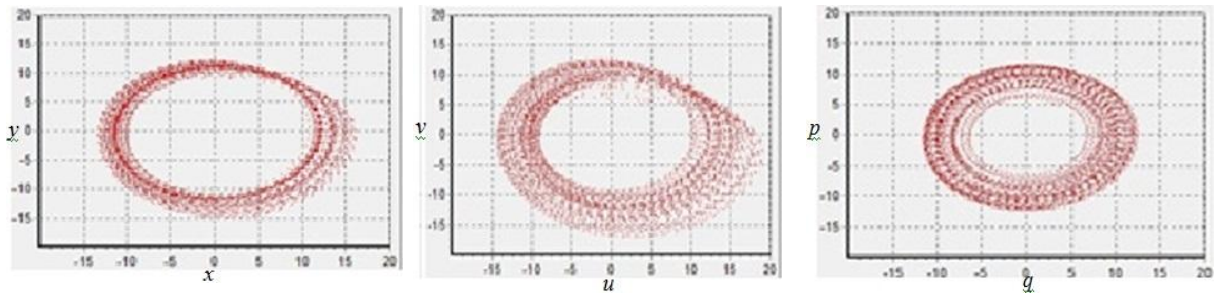
а)



б)



в)



г)

Рис.10. Аттрактор при  $\mu=0.05$ ,  $b=\varepsilon=0.1$ ,  $r=8.5$ ,  $a_3=-0.03$  в точках карты заданных на рис.8б. а) двухчастотный квазипериодический режим (точка 1), б) трёхчастотный квазипериодический режим (точка 2), в) четырёхчастотный квазипериодический режим (точка 3), г) хаотический режим (точка 4).

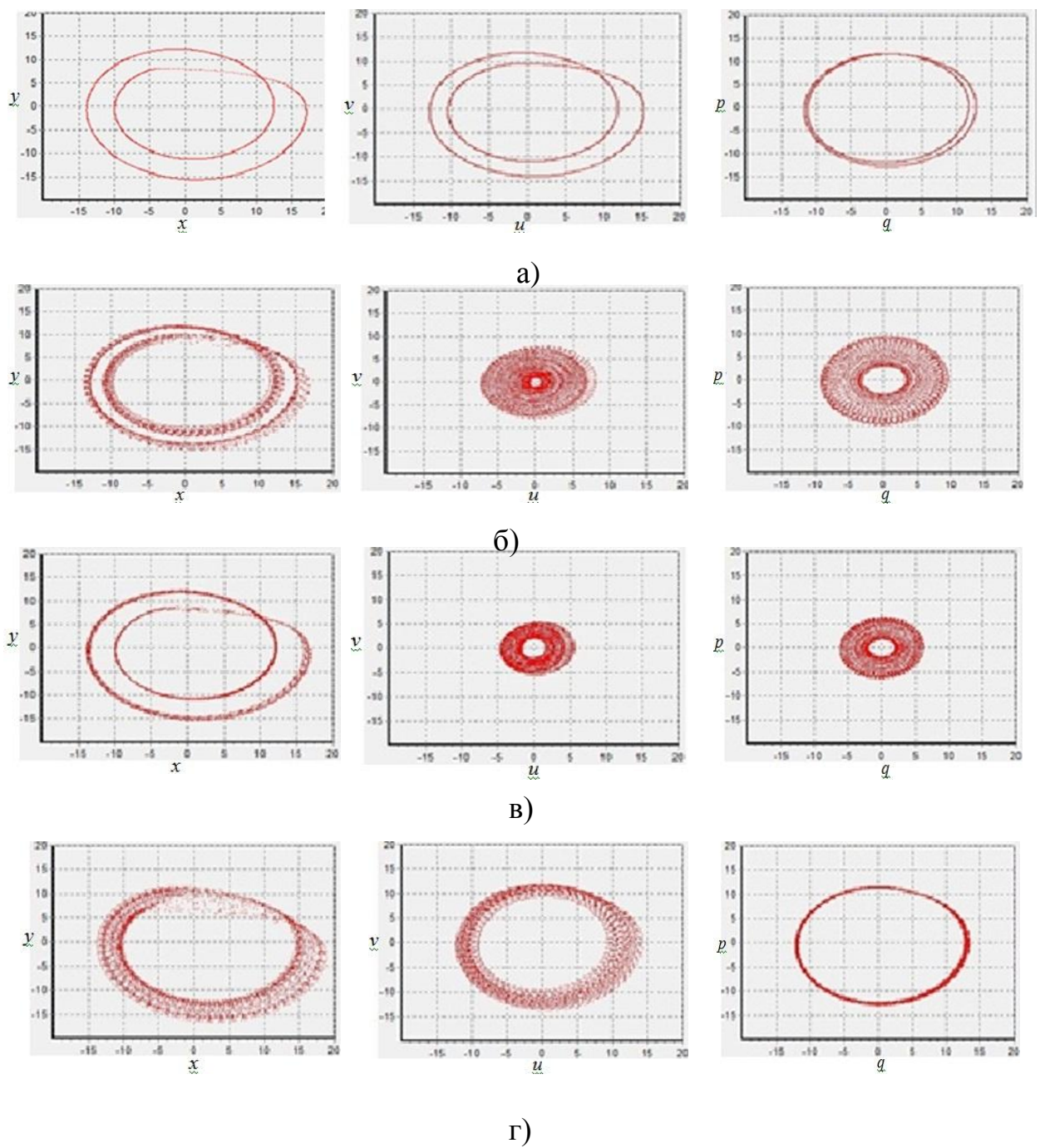


Рис.11. Аттрактор при  $\mu=0.1$ ,  $b=\varepsilon=0.1$ ,  $\gamma=8.5$ ,  $a_3=-0.03$  в точках карты заданных на рис.8в.

а) двухчастотный квазипериодический режим (точка 1), б) трёхчастотный квазипериодический режим (точка 2), в) четырёхчастотный квазипериодический режим (точка 3), г) хаотический режим (точка 4).



## Заключение

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы были исследованы системы двух и трёх связанных дискретных осцилляторов Рёсслера. Были получены следующие результаты:

- Была построена карта ляпуновских показателей для дискретного осциллятора Рёсслера. На ней видим разными цветами отмеченные динамические режимы: периодический, квазипериодический, хаотический. Каждому режиму соответствуют свои значения ляпуновских показателей. Пронаблюдав за изменением аттракторов, мы видим, что торы начинают удваиваться. Происходит каскад удвоения периода, что типично для автоколебательной системы, которая является системой-прототипом для дискретного осциллятора Рёсслера.
- Были построены карты ляпуновских показателей для двух связанных дискретных осцилляторов Рёсслера. На ней так же видны динамические режимы, отмеченные разными цветами, такие как: периодический, квазипериодический двухчастотный, квазипериодический трёхчастотный, хаотический. Были построены карты при разных амплитудах связи. Можем наблюдать, что чем амплитуда связи больше, тем меньше становится область трёхчастотного квазипериодического режима.
- Были построены карты ляпуновских показателей для трёх связанных дискретных осцилляторов Рёсслера. На них мы видим, что количество несоизмеримых частот возросло. На этих картах мы видим область, как двухчастотного квазипериодического режима, так и область трехчастотного, четырехчастотного, динамического режима. Видно, что с увеличением амплитуды связи нарушается симметрия относительно диагонали и исчезает четырёхчастотный квазипериодический режим.

## Список использованной литературы

1. С.П. Кузнецов. Динамический хаос. Изд-во Физматлит, Москва, 2001.
2. Ф.Мун. «Хаотические колебания», Москва, «Мир», 1990.
3. Rössler O.E. An equation for continuous chaos // Phys. Lett. 1976.
4. А.Б. Адилова, А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Динамика связанных дискретных осцилляторов Ресслера. Изв. вузов «ПНД», т.21, №5, Саратов, 2013.
5. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносерв, 2003.