

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

*Кафедра компьютерной физики и метаматериалов
на базе Саратовского филиала
Института радиотехники и электроники
имени В.А. Котельникова РАН*

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Генераторы псевдослучайных чисел в двумерных областях

студента 4 курса 431 группы
направления 03.03.02 «Физика» физического факультета
Баранова Данилы Игоревича

Научный руководитель

заведующий кафедрой

компьютерной физики и метаматериалов,

д.ф.-м.н. профессор _____ В.М. Аникин

(подпись, дата)

Саратов

2017 год

Введение

Актуализация работы. Многомерные датчики псевдослучайных величин представляют интерес при реализации имитационного моделирования (метода Монте-Карло) в ходе численных расчетах сложных интегралов, моделировании таких физико-химических процессов как изомеризация, диффузия, рассеяние (в цепочке связанных отображений), моделирование сложной рельефов (например, в эмиссионной электронике), кодировании информации.

Выпускная квалификационная работа посвящена разработке датчиков псевдослучайных точек в некоторых двумерных областях в форме хаотических отображений, т.е. без использования стандартных генераторов псевдослучайных машинных чисел. Иначе говоря, что в работе строятся новые двумерные хаотические отображения на плоскости, что расширяет аналитические модели детерминированного хаоса.

Предмет исследования – двумерные отображения, демонстрирующие хаотическое поведение.

Целью работы является построение двумерных хаотических отображений на областях сложной формы – в виде треугольников, кругов, колец, криволинейных трапеций и т.п.

Защищаемые результаты – новые алгоритмы генерирования равномерно распределенных случайных точек на двумерных областях сложной формы.

Задачи работы:

1. Вывод аналитических соотношений для хаотических отображений, определенных на двумерных областях в форме квадрата, прямоугольника, треугольника, подэкспоненциальной области, кольца.

2. Численное моделирование работы хаотических отображений.

Структура ВКР. Работа состоит из введения, 5 глав, заключения и списка использованных источников. Общий объем – 40 с., 4 рис.

В первой главе развивается общая идеология (алгоритмизация) синтеза новых отображений, а в последующих главах приводятся результаты для

различных областей в форме квадратов (глава 1), прямоугольников (глава 2), треугольников (глава 3), предэкспоненциальной области (глава 4), кольца (глава 5).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. Общий алгоритм моделирования равномерного распределения в заданной области

Исходные данные. Пусть задана некоторая область $G = \{(x, y) : 0 \leq y \leq g(x)\}$, ограниченная кривой $g(x) \geq 0$, причем

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx < +\infty.$$

Задача состоит в моделировании равномерно распределенной точки (X, Y) в области G . Это означает, что

$$f(x, y) = \frac{1}{G} = \frac{1}{\int_a^b g(x) dx}, \quad G = \int_a^b g(x) dx.$$

Шаг 1. Задаем безусловную плотность вероятности случайной величины X по формуле

$$f(x) = \frac{g(x)}{G}, \quad (A1)$$

где G – площадь криволинейной трапеции, $g(x)$ – уравнение границы криволинейной трапеции.

Шаг 2. Вычисляем функцию распределения случайной величины X по формуле (8):

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx = \frac{1}{G} \int_a^x g(x) dx \quad (A2)$$

и обратную функцию $x = F^{-1}(\alpha)$, где $\alpha \in (0, 1)$.

Шаг 3. Значение x координаты X генерируется по формуле

$$x = F^{-1}(\alpha) \quad (A3)$$

Шаг 4. Задаем условную плотность распределения случайной величины Y :

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{1}{g(x)}. \quad (B1)$$

Вычисляем условную функцию распределения Y :

$$F_{y|x}(y|x) = \int_0^y \frac{dy}{g(x)} = \frac{y}{g(x)} \quad (B2)$$

и обратную ей функцию $y = \beta g(x)$.

Шаг 5. Значение случайной величины Y может быть вычислено по формуле

$$Y = \beta g(x). \quad (B3)$$

Чтобы представить датчик для X и Y в форме хаотических отображений, сделаем следующие шаги:

1. Выбираем вид хаотических генераторов

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \varphi_1(\alpha_n), \quad \alpha_n \in (0,1), \quad n = 0,1,\dots \\ \beta_{n+1} &= \varphi_2(\beta_n), \quad \beta_n \in (0,1), \quad n = 0,1,\dots \end{aligned}$$

2. С учетом уравнений (A1) - (A3) мы получаем для соответствующих величин x_n и x_{n+1} :

$$F(x_{n+1}) = \varphi(F(x_n));$$

$$x_{n+1} = F^{-1}\varphi_1(F(x_n)) \quad (C1)$$

3. С учетом уравнений (B1) – (B3) получаем для соответствующих значений величин Y_n и Y_{n+1} выражения:

$$\frac{y_{n+1}}{g(x)} = \varphi_2\left(\frac{y_n}{g(x)}\right);$$

$$y_{n+1} = g(x)\varphi_2\left(\frac{y_n}{g(x)}\right). \quad (C2)$$

Таким образом, окончательно хаотические генераторы равномерного распределения точки в области G могут быть представлены в виде:

$$\begin{cases} x_{n+1} = F^{-1}\varphi_1(F(x_n)), & x_n \in (a,b), & n = 0,1,\dots \\ y_{n+1} = g(x)\varphi_2\left(\frac{y_n}{g(x)}\right), & y_n \in (a,b), & n = 0,1,\dots \end{cases} \quad (D)$$

Функции φ_1 и φ_2 могут быть выбраны из числа базовых эндоморфизмов – кусочно-линейных отображений с равномерной инвариантной плотностью. В качестве такого преобразования могут быть, например, выбраны два независимых сдвига Бернулли.

2. Генератор псевдоравномерного распределения точек в прямоугольнике (рисунок 1)

При использовании в качестве базового диадического сдвига Бернулли получим следующий генератор распределения точки в прямоугольнике с параметрами (a,b):

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x_n \leq \frac{a}{2}, \\ 2x_n - a, & \frac{a}{2} \leq x_n \leq a. \end{cases}$$

Аналогично:

$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n, & 0 \leq y_n \leq \frac{b}{2}, \\ 2y_n - b, & \frac{b}{2} \leq y_n \leq b. \end{cases}$$

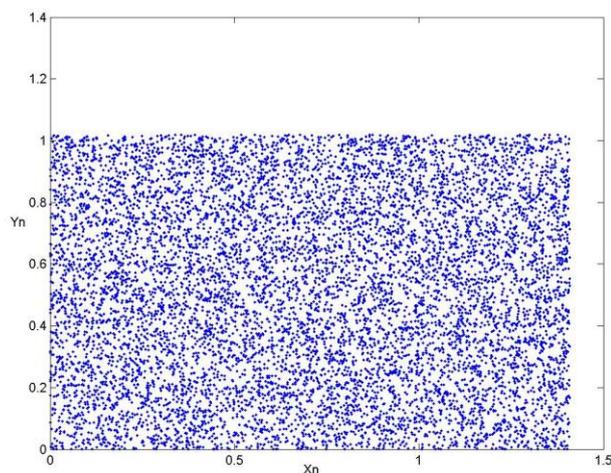


Рис. 1. Моделирование случайных точек в прямоугольнике

2. Генератор псевдоравномерного распределения точек в треугольнике (рис. 2)

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - \sqrt{|1 - 2x_n(2 - x_n)|} \\ y_{n+1} = \left\{ 2 \frac{y_n}{1 - x_n} \right\} \sqrt{|1 - 2x_n(2 - x_n)|} \end{cases}$$

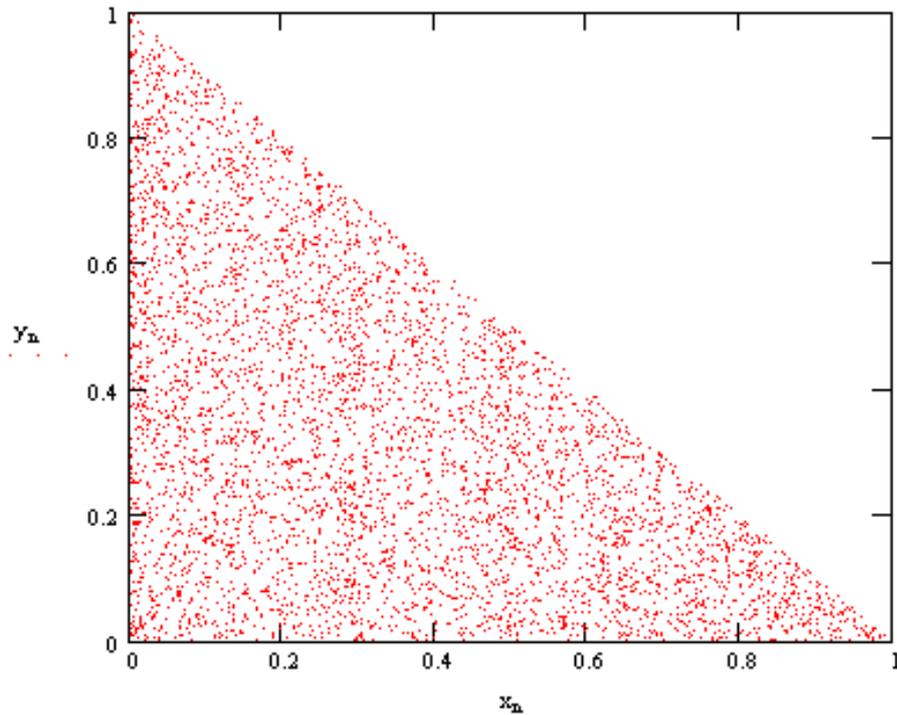


Рис. 2. Моделирование случайных точек в треугольной области $y \leq 1 - x$

2. Генератор псевдоравномерного распределения точек в кольце (рис. 3)

$$\begin{cases} x_{n+1} = \Psi(x_n, y_n) \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}, R_1 \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq R_2, \\ y_{n+1} = \Psi(x_n, y_n) \frac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2}, R_1 \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq R_2; \end{cases}$$

где

$$\Psi(x_n, y_n) = \sqrt{2(x_n^2 + y_n^2) - R_1^2} \Theta_{R_1, \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}}}(\sqrt{x_n^2 + y_n^2}) + \sqrt{2(x_n^2 + y_n^2) - R_2^2} \Theta_{\sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}}, R_2}(\sqrt{x_n^2 + y_n^2});$$

$R_1 < R_2$ - радиусы, $\Theta_{a,b}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b). \end{cases}$ - характеристическая функция интервала (a,b) .

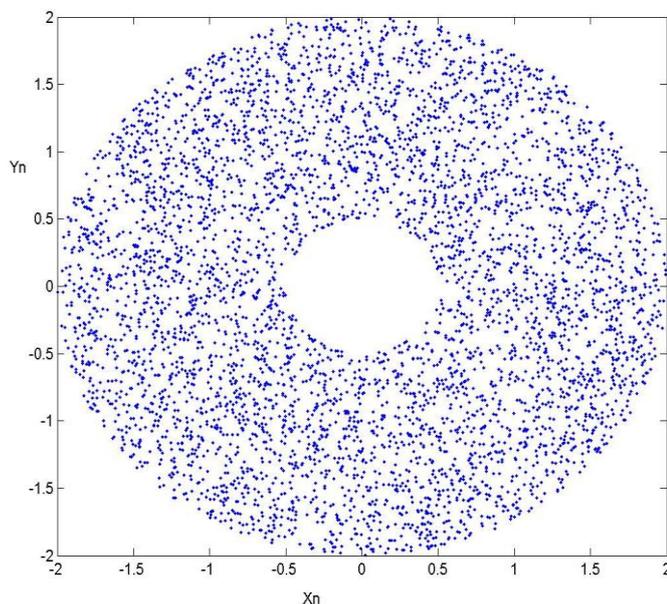


Рис. 3. Моделирование случайных точек в области кольца

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развиты методы построения хаотических генераторов точек (системы величин X, Y), имеющих равномерное распределение на плоских областях сложной формы. В отличие от известного преобразования пекаря, задающего эргодическое и перемешивающее отображение квадранта, этими методами можно построить эргодические и перемешивающие отображения областей со сложными границами в форме криволинейных трапеций различной конфигурации, круга, кольца и т. п.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.И. Арнольд, А. Авец. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск : РХД, 1999.
2. Lasota A., Mackey M.C. Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
3. P.Gaspard. Diffusion, Effusion and Chaotic Scattering: An Exactly Solvable Liouville Dynamics // J. Stat. Phys.1992. Vol 68, Nos 5/6, pp 673-747.

4. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей. М. : Наука, 1969.
5. С.М. Ермаков. Курс статистического моделирования. М. : Наука, 1976.
6. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Ноянова С.А. Двумерные эргодические отображения сложных областей // Вопросы прикладной физики: Межвузовский научный сб. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 1999. Вып. 5. С. 56– 57.
7. Goloubentsev A.F., Anikin V.M., and Noyanova S.A. Two-Dimensional Ergodic Maps: New Examples // 2000 2nd International Conference “Control of Oscillation and Chaos”. Proceedings /Edited by F.L. Chernousko and A.L. Fradkov. Vol. 1. Pp. 144 – 145.
8. Аникин В. М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.
9. Аникин В. М., Аркадакский С.С., Ремизов А. С. Несамосопряженные операторы в хаотической динамике. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2015. 96 с.
10. Аникин В.М. Статистические характеристики отображения И.М. Акулиничева // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. С. 38-48.
11. Аникин В.М., Ноянова С.А., Чебаненко С.В. Кодирование информации на базе отображения пекаря // Гетеромагнитная электроника: Сб. науч. трудов. Вып. 12. Гетеромагнитная микро- и наноэлектроника. Методические аспекты физического образования. Экономика в промышленности / Под ред. проф. А.В. Ляшенко. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. С. 52-60.