

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

*Кафедра компьютерной физики и метаматериалов
на базе Саратовского филиала
Института радиотехники и электроники
имени В.А. Котельникова РАН*

**РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ЧИСЕЛ
ОПЕРАТОРА ПЕРРОНА-ФРОБЕНИУСА
ДЛЯ МНОГОЗВЕННЫХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ
студента 4 курса 431 группы
направления 03.03.02 «Физика» физического факультета
Левушкина Альберта Львовича

Научный руководитель

заведующий кафедрой

компьютерной физики и метаматериалов,

д.ф.-м.н. профессор _____ В.М. Аникин

(подпись, дата)

Саратов

2017 год

ВВЕДЕНИЕ

Целью выпускной квалификационной работы ставится аналитическое нахождение собственных функций эволюционного оператора (оператора Перрона-Фробениуса), соотносимого с одномерными кусочно-линейными отображениями. Таким образом, **объектом** исследования в работе являются одномерные хаотические отображения, а **предметом** исследования являются спектральные свойства эволюционного оператора.

Задачи работы:

1. Получение аналитических решений для собственных функций и собственных чисел оператора Перрона-Фробениуса для многозвенных хаотических отображений.
2. Выявление особенностей решения спектральной задачи для оператора Перрона-Фробениуса в зависимости от четного или нечетного числа ветвей отображения.

Актуальность решения подобных задач обуславливается разнообразным применением хаотических отображений для моделирования хаотических процессов различной природы (в математике, физике, информатике, экономике), причем знание решения спектральной задачи позволяет оценить такие характеристики хаотического процесса, как скорость установления инвариантного состояния в динамической системе, описываемой соответствующим разностным уравнением (отображением), скорость расщепления корреляций в такой системе [1-11]. Последнее важно, например, для грамотного построения датчиков псевдослучайных чисел с различным вероятностным распределением, использования хаотических отображений в задачах кодирования информации.

Структура работы. В первой главе работы характеризуются траекторный и вероятностный подходы к изучению динамики хаотических отображений.

Во второй главе вводится определение оператора Перрона-Фробениуса, демонстрируются его основные свойства и формулируется общий алгоритм нахождения полиномиальных собственных функций оператора.

В третьей главе посредством сочетания аналитических и численных методов рассчитываются собственные числа и собственные функции оператора Перрона-Фробениуса для многозвенных отображений для случаев чет-

ного и нечетного числа полных ветвей кусочно-линейного отображения. Результаты решения сравниваются с решениями спектральной задачи для соответствующих инвертированных отображений.

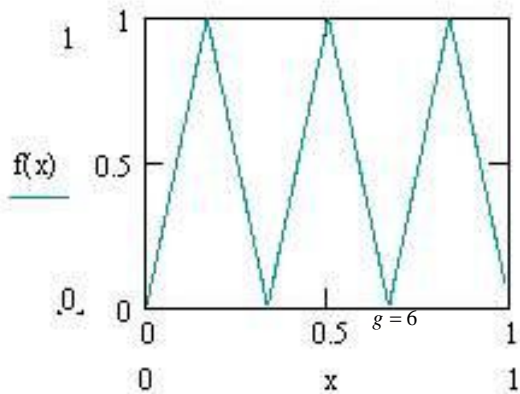
Защищаемые научные положения (новизна). В качестве выносимых на защиту научных результатов выносятся найденные решения спектральной задачи для оператора Перрона-Фробениуса и сравнительный анализ вешения для различных модификаций кусочно-линейного отображения.

Кусочно-линейные и некоторые нелинейные отображения являются простейшими дискретными динамическими системами, демонстрирующими хаотическое поведение, в силу чего они стали своеобразным «полигоном» для апробации аналитических и численных методов исследования более сложных хаотических динамических систем.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Объект исследования – многозвенные хаотические отображения вида (рисунок 1):

$$x_{n+1} = f(x_n) = \sum_{i=0}^{g-1} \left((-1)^i g x_n + (-1)^{i+1} \left(i + \frac{1 - (-1)^i}{2} \right) \right) \theta_i(x)$$



$$\theta_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [i/g, (i+1)/g), \\ 0, & x \notin [i/g, (i+1)/g). \end{cases}$$

Рисунок 1. Многозвенное пилообразное отображение с четным числом ветвей (число ветвей $g=6$)

Определение оператора Перрона-Фробениуса

$$\hat{P}\psi(y) = \int_0^1 \delta(y - f(x))\psi(x) dx$$

Для многозвенного отображения с четным числом g ветвей:

$$P_{(g)}\rho(x) = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{g/2-1} \rho\left(\frac{x+2i}{g}\right)\theta_{0,1}(x) + \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{g/2-1} \rho\left(\frac{2(i+1)-x}{g}\right)\theta_{0,1}(x)$$

$$\theta_{0,1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin (0,1). \end{cases}$$

Собственные функции и собственные числа определяются соотношением:

$$\hat{P}\psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x)$$

Здесь λ_n - собственные числа оператора, ψ_n - собственные функции оператора. Высшие собственные функции оператора Перрона-Фробениуса ортогональны характеристической функции единичного отрезка

$$\int_0^1 \psi_n(x) dx = \delta_{n,0} \quad \delta_{n,0} = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Нахождение собственных функций оператора Перрона-Фробениуса в виде полиномов

Будем искать собственные функции в виде:

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x)\theta_{0,1}(x),$$

где

$$\varphi_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0}$$

Четное число ветвей. В случае четного числа ветвей отображения возникает два решения – четных и нечетных (по порядку) собственных функций и чисел:

Нумерация собственных функций	Собственная функция	Собственное число
$n = 0, 2, 4 \dots$	$\psi_n(x) = \left[B_n(x) - \frac{n}{2} E_{n-1}(x) \right] \theta_{0,1}(x)$	$\lambda_n = \frac{1}{g^n}$
$n = 1, 3, 5 \dots$	$\psi_n(x) = \left[a \cdot B_n(x) + b \cdot E_n(x) \right] \cdot \theta_{0,1}(x)$	

Функции выражаются через полиномы Бернулли $B_n(x)$ и Эйлера $E_n(x)$. Графики четных и нечетных собственных функций представлены на рисунках 1 и 2, соответственно.

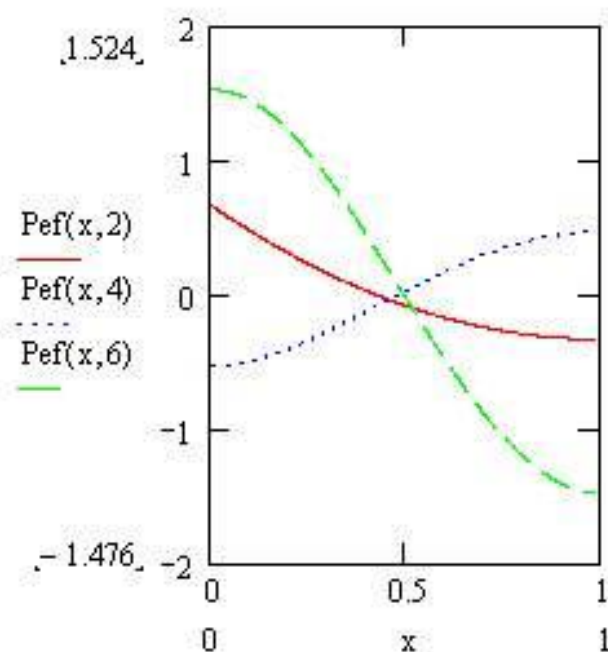


Рисунок 1. 2-я, 4-я и 6-я собственные функции в случае четного числа ветвей отображения

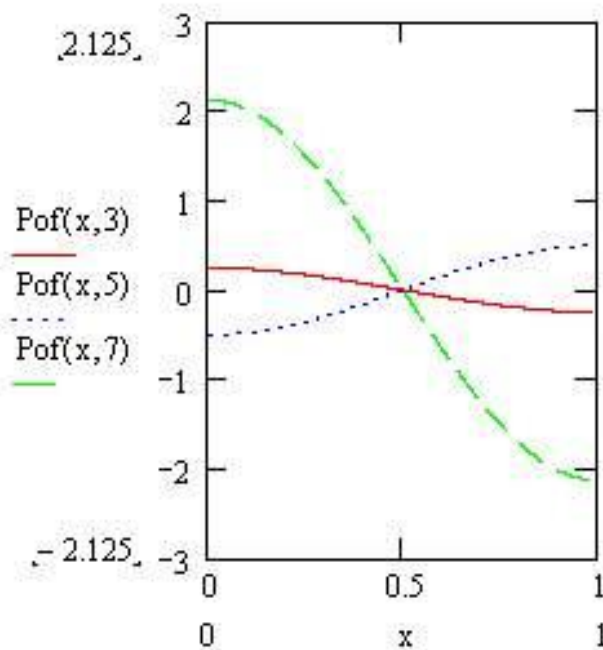


Рисунок 2. 3-я, 5-я и 7-я собственные функции в случае четного числа ветвей отображения

Нечетное число ветвей. Выражения для собственных функций и чисел представлены в таблице:

Нумерация собственных функций	Собственная функция	Собственное число
$n = 0, 2, 4 \dots$	$\psi_{2n}(x) = [B_{2n}(x) - nE_{2n-1}(x)] \theta_{0,1}(x)$	$\lambda_n = \frac{1}{g^n}$
$n = 1, 3, 5 \dots$	$\psi_n(x) = [a \cdot B_{2n}(x) + b \cdot E_{2n-1}(x)] \cdot \theta_{0,1}(x)$	$\lambda_n = \frac{1}{g^{n+1}}$

Графики представлены на рисунках 3 и 4.

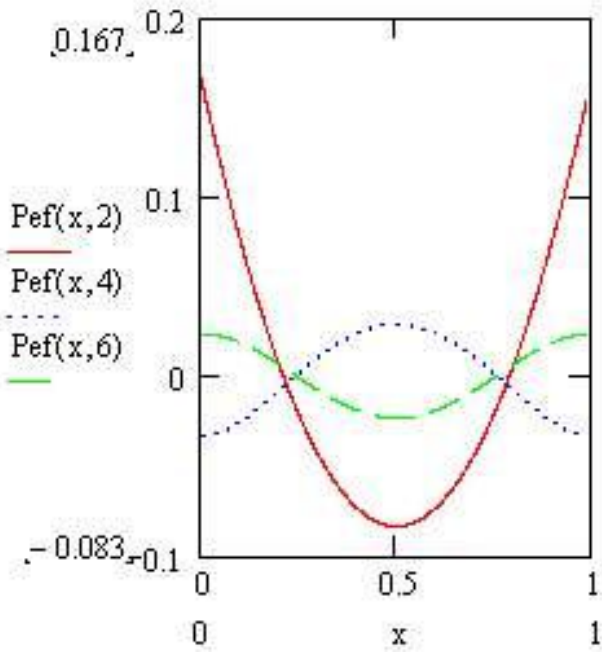


Рисунок 3. 2-я, 4-я и 6-я собственные функции оператора Перрона-Фробениуса в случае нечетного числа ветвей отображения

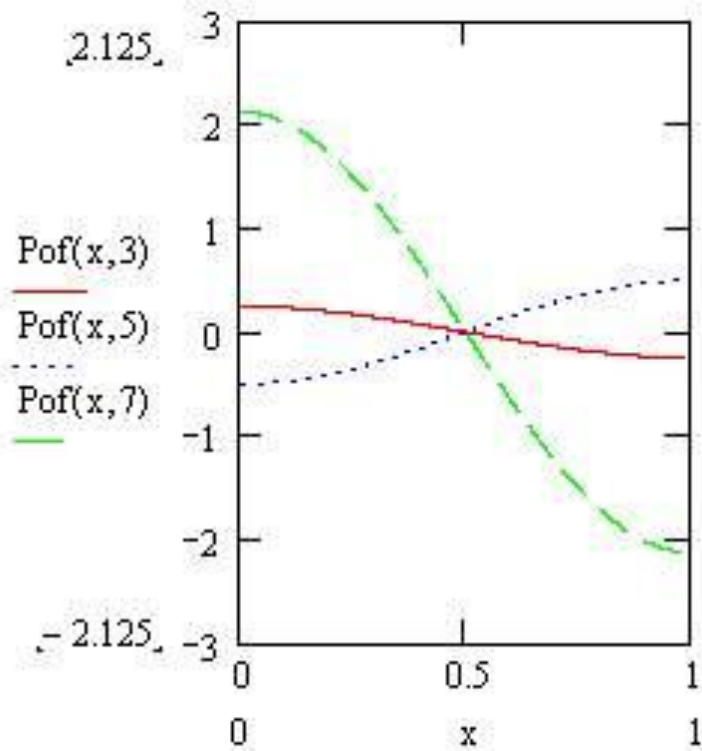


Рисунок 3. 3-я, 5-я и 7-я собственные функции оператора Перрона-Фробениуса в случае нечетного числа ветвей отображения

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Собственные функции оператора Перрона-Фробениуса для многозвенных отображений с четным числом ветвей с четными номерами независимо от числа ветвей отображения являются линейной комбинацией полиномов Бернулли и Эйлера. Функции с нечетными номерами образуют нуль-пространство оператора Перрона-Фробениуса для этих отображений.

В случае пилообразного отображения с нечетным числом участков монотонности собственными функциями оператора Перрона-Фробениуса являются (независимо от числа ветвей) линейные комбинации полиномов Бернулли и Эйлера:

$$\psi_n(x) = [a \cdot B_{2n}(x) + b \cdot E_{2n-1}(x)] \cdot \theta_{0,1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

здесь a и b – произвольные константы. В частном случае это соответствует выражению

$$\psi_{2n}(x) = [B_{2n}(x) - nE_{2n-1}(x)] \theta_{0,1}(x).$$

В случае нечетного числа ветвей собственные функции прямого и инвертированного отображений совпадают, как четные по номерам, так и нечетные. Однако, из-за кратности собственных чисел в первом случае, линейная комбинация четных и нечетных по номерам функций тоже будет собственной функцией. В случае же четного числа ветвей функции из нуль-пространства (нечетные по номерам) совпадают, а четные отличаются знаком в линейной комбинации составляющих их полиномов Бернулли и Эйлера. Это различие в знаке, используя известное свойство полиномов Бернулли и Эйлера,

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x), \quad E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x),$$

можно записать так:

$$\psi_{n,fi}(x) = \psi_{n,f}(1-x),$$

где $n = 2, 4, 6, \dots$, $\psi_{n,f}(x)$ – собственные функции исходного, а $\psi_{n,fi}(x)$ – инвертированного отображений.

Список использованных источников

1. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М. : Мир, 1984. 528 с.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М. : Мир, 1988. 240 с.
3. Пригожин И., Стенгерс И. Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. Изд. 8. М. : Эдиториал УРСС, 2011. 240 с.
4. Данилов Ю. А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. М. : Постмаркет, 2001. 184 с.
5. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М. : Физматлит, 2006. 295 с.
6. Малинецкий Г.Г., Потапов А. Б. Нелинейная динамика и хаос: основные понятия. Изд. 3. М. : URSS, 2011. 240 с.
7. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.
8. Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. Несамосопряженные операторы в хаотической динамике. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2015. 96 с.
9. Аникин В.М. Статистические характеристики отображения И.М. Акулиничева // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. С. 38-48.
10. Аникин В.М., Муштаков А.В. Автокорреляционная функция орбит кусочно-линейного хаотического отображения общего вида // Гетеромагнитная микроэлектроника. 2014. № 17. С. 12-23.
11. Аникин В.М., Ремизов А.С., Муштаков А.В. Автокорреляционные свойства хаотических процессов при нелинейных преобразованиях // Компьютерные науки и информационные технологии : Материалы междунар. Науч. конф. 30 июня – 3 июля 2014 г. – Саратов : Издат. Цент «Наука», 2014. С. 30-33.