

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

*Кафедра компьютерной физики и метаматериалов
на базе Саратовского филиала
Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН*

СИНТЕЗ ТРЕХМЕРНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ
студента 4 курса группы 431
по направлению 0.03.03.02 «Физика» физического факультета
Ледяйкина Дениса Викторовича

Научный руководитель,
заведующий кафедрой
компьютерной физики и метаматериалов,

д.ф.-м.н. профессор _____ В.М. Аникин

(подпись, дата)

Саратов

2017 год

Введение

Актуализация работы. Синтез многомерных хаотических отображений, обладающих равномерной инвариантной плотностью, может рассматриваться как продолжение задачи о генерировании равномерно распределенных псевдослучайных величин в заданной области сложной формы – внутри или на поверхности некоторого пространственного объема (например, шара, эллипсоида, конуса, тела, имеющего форму падающей капли и т.д.). Решение этой задачи до настоящего времени является актуальным для теоретических и прикладных исследований – численных методов (в частности, численного интегрирования методом Монте-Карло, нахождение максимума функций многих переменных посредством вычисления значений функции в произвольно выбираемых точках), компьютерной графики, математического моделирования в интегральной геометрии и для технических приложений, моделирования поверхностных рельефов, кодирования информации и т. д. [1–15].

При синтезе трехмерных отображений одна категория трехмерных отображений может быть сведена к полной или частичной форме отображений Курно, т.е. в виде совокупности независимости отображений в плоской области от отображения по и если область, в которой действует отображение, допускает возможность независимого функционирования компонент отображения. Примерами таких отображений могут служить отображения, реализующиеся, например, в цилиндрических областях.

Вторая категория трехмерных отображений, изначально заданных на области с более сложными границами, предполагает последовательное определение компонент отображения в этой области, исходя из условия равномерности распределения точек в этой области, т.е. представление трехмерного распределения в виде произведения трех вероятностных плотностей – безусловной (для первой координаты), условной для второй координаты (при условии, что первая координата приняла некоторое конкретное значение) и условной для третьей координаты (при условии, что первая и вторая координаты приняли определенные значения). Реализация этого принципа в прямоугольных и криволинейных координатах имеет некоторые отличия.

Цель выпускной квалификационной работы – построение трехмерных хаотических отображений, действующих в объемных областях (шаре, эллипсоиде, цилиндре, других объектов, образованных вращением фигур).

Отличительной особенностью построенных *новых отображений* является то, что они непосредственно могут использоваться как *итерационные датчики* равномерного распределения в трехмерных областях. В этом качестве они могут быть использованы как основной инструмент при имитационном моделировании при решении вычислительных задач методом Монте-Карло, а также при решении физических задач, связанных с моделированием поверхностей случайной структуры (например, в эмиссионной электронике), а также при кодировании информации. Этим обстоятельством определяется *актуальность работы*.

Защищаемые результаты – новые хаотические отображения в трехмерных областях.

Структура работы. В главе 1 выпускной квалификационной работы рассматриваются общие идеи, лежащие в основе метода получения распределений случайных объектов в трехмерных областях, основанных на теореме умножения вероятностных распределений, аффинных преобразованиях, свойствах отображений Курно. В главе 2 проводится синтез отображений, генерирующих случайные точки в двумерных и трехмерных областях – круге, эллипсе, шаре, эллипсоиде, фигурах вращения.

В главе 3 представлены результаты моделирования случайных точек на базе отображений Курно и комбинированных отображений.

Содержание работы

Введение

Глава 1. ОБЩИЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ ТРЕХМЕРНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1.1. Формирование равномерного распределения случайной точки

1.2. Аффинные преобразования

1.3. Моделирование случайного трехмерного вектора для областей, допускающих независимое моделирование отдельных координат

1.4. Моделирование псевдослучайного трехмерного вектора в криволинейной системе координат

Глава 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ШАРА И ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

2.1. Моделирование хаотического отображения круга

2.2. Моделирование хаотического отображения эллипса

2.3. Моделирование хаотического отображения шара

2.4. Моделирование псевдослучайных точек в телах вращения

2.4.1. Общий алгоритм.

2.4.2. Отображение области конуса

2.4.3. Отображение области параболоида вращения

Глава 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ТИПА КУРНО

3.1. Отображение области цилиндра

3.2. Отображение области параллелепипеда

3.3. Отображение области прямой треугольной призмы

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Список использованных источников

Основные результаты

1. Результат моделирования хаотического отображения в круге (рисунок 1).

Формулы моделирования:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \Psi(x_n, y_n) \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}, 0 \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq R; \\ y_{n+1} = \Psi(x_n, y_n) \frac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2}, 0 \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq R. \end{cases}$$

Здесь

$$\Psi(x_n, y_n) = \sqrt{2(x_n^2 + y_n^2)} \Theta_{0, \frac{R}{\sqrt{2}}}(\sqrt{x_n^2 + y_n^2}) + \sqrt{2(x_n^2 + y_n^2) - R^2} \Theta_{\frac{R}{\sqrt{2}}, R}(\sqrt{x_n^2 + y_n^2})$$

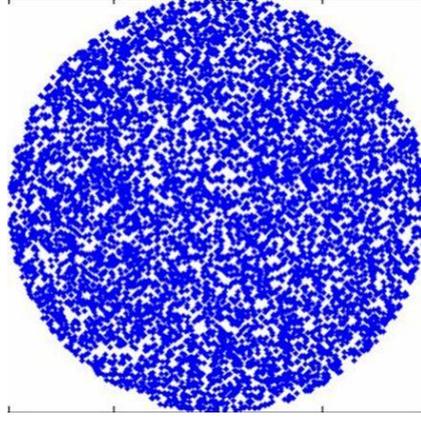


Рисунок 1. Хаотическое отображение точек в круге.

2. Результат моделирования хаотического отображения в шаре

Формулы моделирования. Хаотические отображения для угловых координат точки в сферической системе координат записываются в форме:

$$\theta_{n+1} = \pi\beta_{n+1} = \pi \begin{cases} 2\frac{\theta_n}{\pi}, & 0 \leq \frac{\theta_n}{\pi} \leq \frac{1}{2}; \\ 2\frac{\theta_n}{\pi} - 1, & \frac{1}{2} \leq \frac{\theta_n}{\pi} \leq 1; \end{cases} = \begin{cases} 2\theta_n, & 0 \leq \theta_n \leq \pi/2; \\ 2\theta_n - \pi, & \pi/2 \leq \theta_n \leq \pi. \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\varphi_{n+1} = 2\pi\gamma_{n+1} = 2\pi \begin{cases} 2\frac{\varphi_n}{2\pi}, & 0 \leq \frac{\varphi_n}{2\pi} \leq \frac{1}{2}; \\ 2\frac{\varphi_n}{2\pi} - 1, & \frac{1}{2} \leq \frac{\varphi_n}{2\pi} \leq 1; \end{cases} = \begin{cases} 2\varphi_n, & 0 \leq \varphi_n \leq \pi; \\ 2\varphi_n - 2\pi, & \pi \leq \varphi_n \leq 2\pi. \end{cases} \quad (2.26)$$

Итерационная процедура изменения полярного радиуса:

$$r_{n+1} = \begin{cases} r_n \sqrt[3]{2}, & 0 \leq r_n \leq R_0 / \sqrt[3]{2}, \\ \sqrt[3]{2r_n^3 - R_0^3}, & R_0 / \sqrt[3]{2} \leq r_n \leq R_0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Результат моделирования равномерно распределенных точек в шаре показан на рисунке 2.

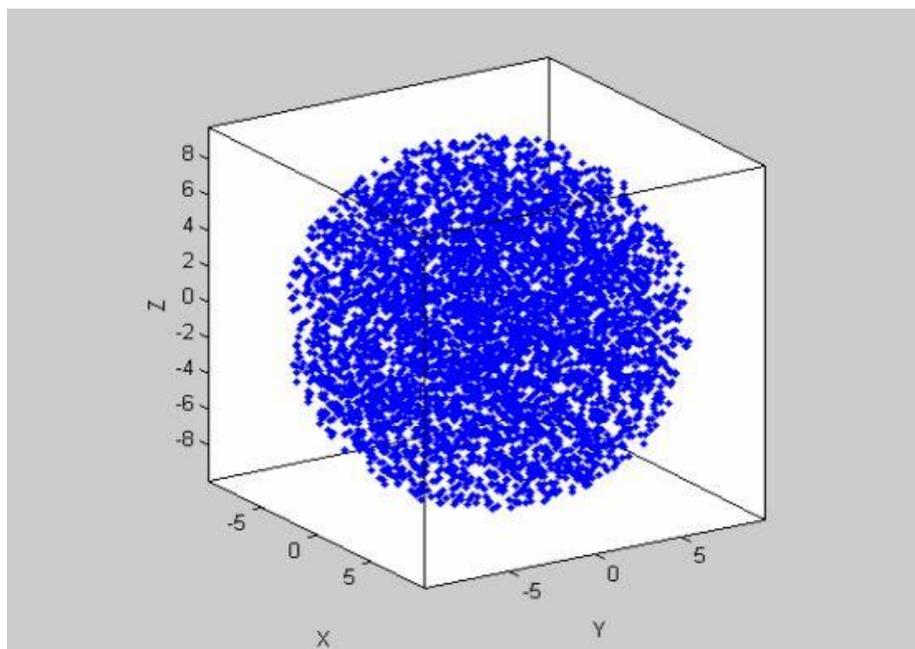


Рисунок 2. Хаотическое отображение точек в шаре

3. Результаты построения хаотических отображений типа Курно

Рассмотрим случай, когда трехмерная область является прямой призмой (ее ребра перпендикулярны плоскому основанию). Частными случаями такой призмы могут быть куб, параллелепипед, треугольная призма, многогранные призмы (симплекс в основании). Эти фигуры можно рассматривать как образованные смещением некоторой плоской фигуры (основания) перпендикулярно плоскости, в которой она расположена. В этом случае можно последовательно решать несвязанные задачи о равномерном распределении точки на плоскости и равномерном распределении точки по вертикальной координате.

Отображение области цилиндра (рисунок 3). Совместная плотность распределения координат случайной точки в области цилиндра (рисунок 9) есть

$$f(x, y, z) = f_1(x)f_2(y, z | x) = \frac{1}{\pi r^2 h},$$

где r и h - радиус основания и высота цилиндра. Случайная координата Z моделируется как равномерно распределенная случайная величина: $Z = h\gamma$, где γ - псевдослучайная величина с равномерным распределением

на единичном интервале. Точка (X, Y) в сечении $z = \text{const}$ равномерно распределена в круге радиуса r : $f_2(x, y | z) = \frac{1}{\pi r^2}$.

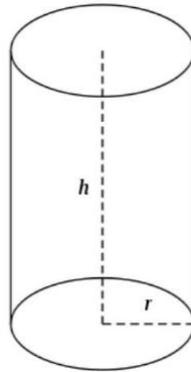


Рисунок 3. Цилиндрическая область

Отображение области параллелепипеда. Моделирование точки (X, Y, Z) параллелепипеда с геометрическими размерами a, b, c ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$) распадается на независимое моделирование независимых равномерно распределенных величин $X = a\alpha, Y = b\beta, Z = c\gamma$, где α, β, γ - независимые псевдослучайные величины с равномерным распределением на единичном интервале.

Отображение области прямой треугольной призмы. Координата Z моделируется в треугольной прямой призме (рисунок 4) как равномерно распределенная величина $Z = h\gamma$, где γ - псевдослучайная величина с равномерным распределением на единичном интервале. Точка (X, Y) в сечении $z = \text{const}$ равномерно распределена в треугольнике, имеющем параметры треугольника основания.

Аналогично происходит моделирование случайной точки в призме, основанием которой служит многогранник.

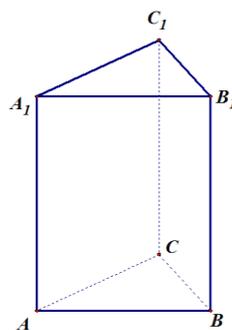


Рисунок 4. Треугольная призма

Заключение

В работе предложены алгоритмы отображений трехмерных областей сложной формы, обладающих равномерным инвариантным распределением. В частности, построены трехмерные хаотические отображения, действующих в таких объемных областях, как шар, эллипсоид, цилиндр, другие объекты, образованных вращением двумерных образующих фигур.

Отличительной особенностью построенных отображений является то, что они могут быть построены в «замкнутой» форме (без обращения к внешним генераторам псевдослучайных чисел) и непосредственно могут использоваться как итерационные датчики равномерного распределения в трехмерных областях. При этом вид отображений, обладающих одной и той же инвариантной плотностью, может быть различен и выявляться согласно дополнительным критериям – например, обеспечивать определенный вид автокорреляционной функции реализаций этих отображений.

Построенные отображения дополняют «коллекцию» дискретных систем, демонстрирующих хаотическое поведение, а также могут быть полезны как основной инструмент при имитационном моделировании при решении вычислительных задач методом Монте-Карло, а также при решении физических задач, связанных с моделированием поверхностей случайной структуры (например, в эмиссионной электронике), а также при кодировании информации корпоративной значимости и частной переписки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Smale, Steve. Mathematical Problems for the Next Century // *Mathematical Intelligencer*. 1998. Vol. 20, iss. 2. Pp: 7–15. DOI:10.1007/bf03025291.

2. Шаракшанэ А. С., Железнов И. Г., Ивницкий В. А. Сложные системы. М. : Высшая школа, 1977. 247 с.

3. Marsaglia G. Choosing a Point from the Surface of a Sphere // *Ann. Math. Stat.* 1972. Vol.43, iss. 2. Pp. 645-646.

4. Rubinstein R.Y., Kroese D.P. Simulation and the Monte Carlo methods. Second Edition. Wiley-InterScience, 2007. 345 p.

5. Bendito E., Carmona A., Encinas A.M., Gesto J.M. Estimation of Fekete Points // *J. Comput. Phys.* 2007. Vol. 225, iss. 2. Pp. 2354–2376. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.03.017.

6. Tashiro Y. On methods for generating uniform random points on the surface of a sphere // Ann. Inst. Stat. Math. 1977. Vol. 29, Pp. 295-300.

7. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Математическая модель армирования оболочек из волокнистых композиционных материалов и проблема равномерного распределения точек на поверхностях // Вестник ПГТУ. Механика. 2010. № 4. С. 55-66 .

8. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Универсальный алгоритм равномерного распределения точек на произвольных аналитических поверхностях в трехмерном пространстве // Фундаментальные исследования. 2013. № 4-3. С. 618-622. URL: <https://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=31243> (дата обращения: 07.05.2017).

9. Аникин В.М., Ноянова С.А., Чебаненко С.В. Кодирование информации на базе отображения пекаря // Гетеромагнитная электроника: Сб. науч. трудов. Вып. 12. Гетеромагнитная микро- и наноэлектроника. Методические аспекты физического образования. Экономика в промышленности / Под ред. проф. А.В. Ляшенко. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. С. 52-60.

10. Аникин В.М. Статистические характеристики отображения И.М. Акулиничева // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 38-48.

11. Аникин В. М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.

12. Аникин В. М., Аркадакский С.С., Ремизов А. С. Несамосопряженные операторы в хаотической динамике. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2015. 96 с.

13. Goloubentsev A.F., Anikin V.M., Noyanova S.A. Two-Dimensional Ergodic Maps: New Examples // 2000 2nd International Conference "Control of Oscillations and Chaos". St. Petersburg, 2000, July 5-7. Proceedings /Edited by F.L. Chernousko and A.L. Fradkov. St. Petersburg: IEEE. 2000. Vol. 1. Pp. 144 - 145.

14. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М. : Наука, 1969. 576 с.

15. Ермаков С.М. Курс статистического моделирования. М. : Наука, 1982. 296 с.