

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

Фильтрация зашумленных сигналов с применением вейвлетов

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 03.03.03 «Радиофизика»
физического факультета
Авдюхова Сергея Владимировича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор _____ А.Н. Павлов

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор _____ В.С. Анищенко

Саратов 2017 год

ВВЕДЕНИЕ

Преобразование Фурье, особенно в случае применения быстрого алгоритма вычисления (быстрого преобразования Фурье, БПФ), является важным инструментом для анализа и обработки многих сигналов различной природы [1, 2]. Оно имеет определенные ограничения, если анализируемые сигналы являются нестационарными (например, аудио-сигналы, передающие речевые сообщения). Несмотря на то, что при анализе подобных сигналов широко применяется оконное преобразование Фурье, в последние примерно 20-30 лет все большую популярность при обработке речевых сообщений и многих других типов нестационарных сигналов приобретает вейвлет-анализ [3, 4].

Вейвлет-преобразование (ВП) использует набор локализованных функций. Эти функции могут иметь аналитическую форму записи (например, они могут представлять собой производные функции Гаусса) или, напротив, не иметь аналитического выражения и задаваться набором коэффициентов фильтров. Дискретная и быстрая реализация ВП с применением вещественных базисов известна как стандартный метод ДВП (дискретное вейвлет-преобразование) [4].

С помощью стандартного ДВП разложение сигнала длительности N отсчетов осуществляется таким образом, что число коэффициентов разложения также будет равно N . По этой причине можно говорить о том, что данное разложение не является избыточным. Этот метод может быть реализован с использованием рекурсивных фильтров (он имеет глубокую аналогию с идеологией субполосного кодирования, предусматривающей применение пары зеркальных фильтров, низкочастотного и высокочастотного) [4]. Метод ДВП широко применяется в рамках многомасштабного анализа – очень полезного подхода, позволяющего проводить анализ и обработку сигналов на различных уровнях разрешения. Несомненными преимуществами данного подхода являются отсутствие избыточности, быстрота и простота программной реализации алгоритмов разложения, а также возможность проводить анализ в широком диапазоне масштабов. Все это стало причиной широкого применения

методов ДВП во многих приложениях, связанных с цифровой обработкой сигналов. В частности, этот подход активно применялся в задачах сжатия данных и цифровой фильтрации.

Несмотря на то, что стандартный метод ДВП является очень мощным инструментом анализа и обработки многих сигналов и изображений, у него есть ряд принципиальных недостатков, из которых можно выделить три основных: 1) чувствительность к смещению базисной функции, приводящая к появлению сложных, непредсказуемых паттернов вейвлет-коэффициентов в окрестности сингулярностей; 2) плохая избирательность по направлению, которая проявляется при обработке изображений; 3) отсутствие фазовой информации [5]. Известны некоторые расширения стандартного ДВП, которые позволяют устранить первый недостаток, обеспечив инвариантность относительно сдвига базисной функции, но это достигается за счет сильной избыточности вейвлет-преобразования [6].

Недавние исследования предложили способ устранения не менее двух (а порой и всех трех перечисленных недостатков) за счет применения различных вариантов комплексного вейвлет-преобразования (КВП) с контролируемой избыточностью [7, 8].

Целью выпускной квалификационной работы является сравнение методов цифровой фильтрации зашумленных сигналов на основе стандартного варианта дискретного вейвлет-преобразования и быстрых алгоритмов вейвлет-преобразования, применяющих комплексные базисные функции.

Материалы исследования. Исследования проводились на основе вейвлет-анализа зашумленных тестовых сигналов. В качестве метода исследования использовались расчеты ДВП и КВП.

Выпускная квалификационная работа содержит введение, две главы (1 – Краткие теоретические сведения; 2 – Результаты проведенных исследований), заключение и список использованных источников. Общий объем работы 42 стр.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Краткие теоретические сведения. Вейвлет – это маленькая волна, энергия которой является сконцентрированной во времени. Она позволяет проводить одновременный анализ во временной и в частотной областях, представляя собой подходящий инструмент для изучения переходных, нестационарных процессов и систем с меняющимися во времени характеристиками.

Если применяются быстрые алгоритмы дискретного вейвлет-преобразования, то длину выборки необходимо задавать равной степени числа 2 ($N = 2^j$), в связи с тем, что переход от менее детального к более детальному уровню разложения сопровождается двукратным уменьшением длины выборки. Проиллюстрируем общую идеологию рассматриваемого подхода на примере произвольного временного ряда $x(i) = x(i\Delta t)$. Когда некоторый сигнал (временной ряд) $x(i)$ проходит через НЧ-фильтр с характеристикой $g(i)$, то на выходе будет получен сигнал, который является сверткой сигнала на входе и спектральной характеристики НЧ-фильтра

$$y_{\text{нч}}(k) = (x * g)(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)g(k-i). \quad (1)$$

Взаимосвязанный с НЧ-фильтром ВЧ-фильтр $h(i)$ задается следующим образом

$$g(i) = (-1)^i h(2M - i - 1), \quad (2)$$

где M обозначает длину области задания вейвлет-функции. При возрастании M можно применять более регулярные вейвлеты, обладающие M нулевыми моментами [3]. Такие вейвлеты позволяют осуществлять более сильное сжатие сигнала и уменьшают ошибки синтеза сигнала по коэффициентам разложения, возникающие вследствие фильтрации. Кроме того, увеличение M приводит к значительному увеличению коэффициентов фильтра, а это также имеет ряд недостатков, например, при этом многократно растет время вычислений. Последнее обстоятельство нежелательно при кодировании и передаче

информации. Осциллирующие «хвосты» вейвлета при больших значениях M представляют собой еще один недостаток при решении многих задач. По этим причинам выбор вейвлета должен проводиться, исходя из приоритетов при решении конкретных задач.

Обычно для реализации ДВП используют вейвлеты Добеши, которые представляют собой семейство ортонормированных функций с разной областью задания. Для проведения расчетов на компьютере применяют специальные процедуры, позволяющие провести быстрое вычисление коэффициентов вейвлет-преобразования на основе функций Добеши.

Для области задания вейвлета $M \in \mathbb{N}$, функция Добеши D^{2M} следующего вида $\psi = {}_M\psi \in L^2(\mathbb{R})$ определяется выражением

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} (-1)^k h_{2M-1-k} \varphi(2x-k), \quad (3)$$

где $h_0, \dots, h_{2M-1} \in \mathbb{R}$ – коэффициенты фильтра, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=0}^{M-1} h_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{M-1} h_{2k+1}, \quad (4)$$

и для целых чисел $l = 0, 1, \dots, M-1$ выполняется условие

$$\sum_{k=2l}^{2M-1+2l} h_k h_{k-2l} = \begin{cases} 1, & l = 0, \\ 0, & l \neq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Когда сигнал $x(i)$ проходит через квадратурные зеркальные фильтры, имеющие характеристики $g(i)$ и $h(i)$, то этот процесс сопровождается прореживанием выходных сигналов, и в ходе этого прореживания оставляют четные или нечетные отсчеты. Такое прореживание можно реализовать, поскольку фильтрация сопровождается двукратным уменьшением спектрального диапазона сигнала. Отсчеты на выходе фильтров определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} y_{\text{нч}}(k) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)g(2k-i), \\ y_{\text{вч}}(k) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(2k-i). \end{aligned} \quad (6)$$

Данные сигналы опять подаются на вход фильтров, и процесс фильтрации и прореживания продолжается. При условии, что прореживание уменьшает вдвое диапазон частот, за счет того, что применяются сопряженные фильтры, исходный сигнал однозначно восстанавливается при обратном преобразовании (синтезе по вейвлет-коэффициентам) [4]. Коэффициенты разложения по вейвлетам отражают амплитудные характеристики анализируемых процессов на разных уровнях разрешения. Для фильтрации помех небольшие по абсолютной величине вейвлет-коэффициенты на малых масштабах (наиболее подверженные влиянию флуктуаций) отбрасывают перед проведением обратного преобразования (метод пороговой фильтрации).

Если не накладывать условие ортонормированности базиса, то это дает дополнительную свободу при решении задач. Например, избыточность вейвлет-преобразования для неортонормированных базисов (фреймов) дает возможность уменьшить точность расчета вейвлет-коэффициентов, но при этом восстановить исходный сигнал с высокой точностью [9, 10]. Неортонормированные базисы позволяют сделать методы фильтрации менее зависимыми от случайных искажений информативных вейвлет-коэффициентов, которые описывают важные детали сигнала. Фреймы или избыточные разложения сигналов часто применяются для кодирования и передачи информации, где применение избыточных кодов позволяет сохранять передаваемую информацию, а также для сжатия сигналов и фильтрации помех.

К числу различных вариантов избыточных вейвлет-преобразований относится дискретное вейвлет-преобразование двойной плотности (ДВПДП) [8]. Этот метод использует похожую идеологию с построением функций Добеши стандартной схемы реализации ДВП, в рамках которой используется одна скейлинг-функция $\varphi(t)$ и один вейвлет $\psi(t)$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sqrt{2} \sum_n h_0(n) \varphi(2t - n), \\ \psi(t) &= \sqrt{2} \sum_n h_1(n) \psi(2t - n).\end{aligned}\tag{7}$$

С помощью h_0 и h_1 обозначены НЧ- и ВЧ-фильтр.

При построении вейвлет-функций в рамках метода ДВПДП ставиться задача обеспечения наибольшей гладкости функций при условии малой длины области задания этих функций. Эта задача решалась в работах [7, 8], авторы которых предложили соответствующие базисы.

В ряде работ отмечаются преимущества комбинированных алгоритмов, применяющих, с одной стороны, ДВПДП, а с другой стороны, использующих идеологию дополнения вещественных вейвлетов и скейлинг-функций мнимыми частями, сопряженными по Гильберту. Это позволяет создавать более мощные инструменты цифровой обработки сигналов, обеспечивающие возможность устранения таких проблем, как отсутствие инвариантности относительно сдвига, артефакты вейвлет-преобразования и т.д. Таким инструментом является комплексное вейвлет-преобразование двойной плотности (КВПДП), которое может быть реализовано как в одномерном, так и в двумерном варианте. В отличие от ДВПДП одномерный вариант КВПДП включает дополнительное «дерево» разложения сигнала с применением мнимых частей вейвлет-функций.

Этот подход основан на применении двух различных скейлинг-функций и четырех различных вейвлет-функций, при котором два вейвлета предусматривают смещение друг относительно друга на $1/2$, и еще два вейвлета формируют пары, обладающие свойством приближенного сопряжения по Гильберту. Таким образом, одна пара из четырех вейвлетов смещена относительно другой пары, и ее целые смещения вдоль временной оси при разложении сигнала попадают между целыми смещениями второй пары.

При задании вейвлет-функций для реализации КВПДП необходимо выполнение ряда условий для всех 6 применяемых фильтров: 1) они должны удовлетворять требованию точной реконструкции сигнала при проведении обратного преобразования (восстановления сигнала по вейвлет-коэффициентам); 2) вейвлеты формируют две пары функций, сопряженных по Гильберту (хотя бы приближенно); 3) вейвлеты имеют заданное число нулевых моментов; 4) фильтры имеют малую область задания. Детали построения таких фильтров приводятся в работе [8].

Результаты проведенных исследований. В последние годы значительное внимание стало уделяться методам, использующим избыточные вейвлет-преобразования – фреймы [3]. Такие методы уменьшают искажения восстановленного сигнала в случае, когда при фильтрации удаляются информативные коэффициенты разложения, или присутствие значительного уровня фоновых помех снижает точность представления сигнала в базисе вейвлет-функций. Несмотря на то, что в качестве базисных могут применяться разные функции, предпочтение отдается использованию комплексных вейвлетов, которые позволяют избежать основных недостатков стандартного метода фильтрации на основе ДВП. В работах [5, 6] было обосновано, что для устранения данных недостатков целесообразно применение комплексных функций, у которых действительная и мнимая часть обладают свойством сопряжения по Гильберту, т.е. аналитических или почти аналитических вейвлетов. Однако выбор «хорошего» базиса не гарантирует того, что проводимая с его помощью фильтрация обеспечит снижение ошибки, так как качество очистки сигналов от помех существенно зависит от параметров фильтров, таких как пороговый уровень, задаваемый при фильтрации, и от отношения сигнал/шум. В данной работе мы акцентируем внимание на настройке параметров вейвлет-фильтров, использующих комплексные базисы, и показываем, что для их эффективного применения важно контролировать величину порогового уровня.

Традиционно для коррекции вейвлет-коэффициентов выбирают два варианта задания пороговой функции – «жесткий» и «мягкий». В соответствии с выводами проведенных исследований, «мягкий» вариант предпочтительнее при цифровой фильтрации сигналов и изображений. Более сложной задачей является выбор оптимального порогового уровня. Несмотря на существование ряда рекомендаций, они преимущественно были сделаны для фильтров на основе ДВП, и их применение в случае комплексных базисов не гарантирует минимальную ошибку фильтрации.

Чтобы проиллюстрировать это, был рассмотрен метод фильтрации на основе комплексного вейвлет-преобразования двойной плотности (КВПДП) [8], который, в отличие от ДВП, использует две вейвлет-функции ψ с сопряженными по Гильберту действительными и мнимыми частями. В результате при изменении масштаба детализирующие коэффициенты сохраняются полностью, а аппроксимирующие коэффициенты (коэффициенты разложения по скейлинг-функциям φ) прореживаются в два раза. Масштабные преобразования определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\psi_{1,2}(t) &= \sqrt{2} \sum_n h_{1,2}(n) \psi_{1,2}(2t - n), & h_2(n) &= h_1(n-1), \\ \varphi(t) &= \sqrt{2} \sum_n h_0(n) \varphi(2t - n),\end{aligned}\tag{8}$$

а коэффициенты фильтров задаются в соответствии с таблицами, вычисленными в работе [8].

В целях сопоставления параметров, обеспечивающих наилучшее качество фильтрации, был рассмотрен тестовый пример – гармонические колебания с аддитивным белым шумом большой интенсивности (отношение сигнал/шум 0 дБ). Вначале были сопоставлены результаты фильтрации для метода на основе ДВП, применяющего вейвлеты Добеши. Было показано, что качество фильтрации с использованием «мягкого» варианта задания поровой функции выше, чем для «жесткого». Расчеты подтверждают это как для рассмотренного примера, так и при других отношениях сигнал/шум. Полученные результаты являются ожидаемыми и соответствуют выводам других работ.

Однако здесь хотелось бы обратить внимание на одно важное обстоятельство – преимущество выбора «мягкого» варианта задания поровой функции проявляется только при малых C . Если пороговый уровень задать большим, то ситуация принципиально изменится, и уже «жесткий» вариант задания поровой функции будет предпочтительнее.

Рассмотрим теперь следующую задачу – будем минимизировать ошибку фильтрации за счет настройки параметров фильтра (вейвлет-базиса и порогового уровня C). В работе приведены полученные результаты, в соответствии с которыми минимальная ошибка 0.68 получена для вейвлета

Добеси D^7 при пороговом уровне $C=1.22$. Далее аналогичные расчеты были проведены для метода КВПДП. В соответствии с расчетами, выполненными при разных значениях порогового уровня, минимальная среднеквадратичная ошибка фильтрации составляет 0.63 при $C=0.6$. Таким образом, при использовании метода КВПДП не только происходит уменьшение ошибки фильтрации, но и примерно в 2 раза уменьшается оптимальный пороговый уровень.

Если же величину порога задавать в соответствии с общими рекомендациями, применяемыми для метода ДВП (выбор универсального порога, задание C по методу SURE и т.д.), то преимущества КВПДП не только не гарантируются, но полученные результаты могут даже оказаться хуже, чем для стандартного метода ДВП. Так, при оптимальном пороге для метода ДВП ($C=1.22$), алгоритм КВПДП приводит к более высокой ошибке фильтрации. Отметим, что комплексные вейвлет-базисы особенно эффективны при высоком уровне помех, а при фильтрации слабого шума результаты являются сопоставимыми.

Аналогичное сравнение рассмотренных методов фильтрации было проведено для других сигналов, в частности, для аудио-сигналов с подмешенным аддитивным шумом. Несмотря на индивидуальные особенности поведения зависимости ошибки фильтрации от выбранного порогового значения, качественное соответствие наблюдалось во всех рассмотренных примерах. При этом были подтверждены общие выводы о целесообразности снижения примерно в 2 раза оптимального порогового уровня, рассчитанного для метода ДВП при «мягком» варианте задания пороговой функции. Данное снижение является одним из важных преимуществ метода КВПДП, так как оно позволяет в меньшей степени корректировать наиболее информативные вейвлет-коэффициенты, обеспечивая уменьшение риска внесения случайных искажений на этапе синтеза сигнала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной рассматривалась проблема вейвлет-фильтрации зашумленных сигналов с применением вещественных и комплексных базисных функций. Несмотря на то, что вейвлет-фильтры имеют ряд преимуществ по сравнению с фильтрацией на основе Фурье-преобразования, тем не менее, настройка фильтров играет важную роль, так как при оптимизации процедуры выбора параметров фильтров среднеквадратичная ошибка фильтрации может быть уменьшена на 10 и более процентов, что является важным для реализации вейвлет-фильтров на практике.

В работе были рассмотрены подходы на основе стандартного ДВП, применяющего критическую выборку (ортонормированные базисы семейства Добеши), а также избыточные комплексные вейвлет-преобразования (метод КВПДП), более сложные с точки зрения их реализации, но в то же время позволяющие устранить ряд принципиальных недостатков простых вейвлет-фильтров.

В ходе сравнительного анализа методов было показано, что в случае применения метода КВПДП целесообразно уменьшать примерно в 2 раза величину порогового уровня, вычисляемого в рамках метода ДВП при «мягком» варианте задания пороговой функции. Это снижение представляет собой важное преимущество метода КВПДП, так как оно позволяет в меньшей степени корректировать наиболее информативные вейвлет-коэффициенты, уменьшая риск внесения случайных искажений на этапе синтеза сигнала.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Бендат, Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1989.
- [2] Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – М.: Техносфера, 2007.
- [3] Дремин, И. М. Вейвлеты и их применение / И. М. Дремин, О. В. Иванов, В. А. Нечитайло // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171. – С. 465–501.

- [4] Vetterli, M. Wavelets and subband coding / M. Vetterli, J. Kovacevic. – NJ: Prentice Hall, 1995.
- [5] Selesnick, I. W. The dual-tree complex wavelet transform / I. W. Selesnick, R. G. Baraniuk, N. G. Kingsbury // IEEE Signal Processing Magazine. – 2005. – Vol. 22(6). – P. 123-151.
- [6] Shukla, P. D. Complex wavelet transforms and their applications / P. D. Shukla. – Master of Philosophy report. – Scotland: University of Strathclyde Glasgow, 2003.
- [7] Kingsbury, N. G. Image processing with complex wavelets / N. G. Kingsbury // Philos. Trans. R. Soc. London A. – 1999. – Vol. 357(1760). – P. 2543-2560.
- [8] Selesnick, I. W. The design of approximate Hilbert transform pairs of wavelet bases / I. W. Selesnick // IEEE Trans. Signal Processing. – 2002. – Vol. 50. – P. 1144-1152.
- [9] Jansen, M. Noise reduction by wavelet thresholding / M. Jansen. – New York: Springer-Verlag, 2001.
- [10] Donoho, D. L. De-noising by soft-thresholding / D. L. Donoho // IEEE Transactions on Information Theory. – 1995. – Vol. 41. – P. 613-627.