

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Численное моделирование динамики цепочки нелинейных
неидентичных осцилляторов, возбуждаемых внешним
локальным источником**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 03.03.03 «Радиофизика»

физического факультета

Гераськина Евгения Ивановича

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

А.П. Четвериков

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

В.С. Анищенко

Саратов 2017 год

ВВЕДЕНИЕ

Изучение режимов синхронного поведения искусственно созданных или природных объектов является одним из наиболее актуальных направлений современной нелинейной динамики. Под синхронизацией обычно понимают установление некоторых соотношений между основными характеристиками колебательных систем. Впервые эффект синхронизации открыл Гюйгенс в XVII веке, наблюдая за поведением маятниковых часов, висящих на общей опоре. Постепенно стало ясно, что различные явления в природе и технике также подчиняются неким универсальным законам. На сегодняшний день детально разработана теория синхронизации периодических автоколебаний, рассмотрены случаи синхронизации квазипериодических колебаний и колебаний в присутствии шумов.

Различают вынужденную синхронизацию, т.е. синхронизацию автоколебаний внешним сигналом, и взаимную синхронизацию, наблюдающуюся при взаимодействии двух или более автоколебательных систем. Тем не менее, оба случая основываются на одних и тех же механизмах синхронизации – подстройке собственных частот и фаз, либо подавлении одной из собственных частот взаимодействующих систем.

В нелинейной динамике существует несколько фундаментальных моделей, чаще всего используемых для демонстрации тех или иных эффектов. Одна из таких моделей – осциллятор Ван дер Поля. Это хорошо изученная система, которая применяется для моделирования широкого круга явлений и процессов.

Целью выпускной квалификационной работы является исследование цепочки взаимодействующих осцилляторов Ван-дер-Поля с двумя различными частотами.

Материалы исследования. Исследования проводились на основе численного эксперимента со статистическим анализом полученных данных.

Выпускная квалификационная работа содержит введение, две главы (1.Краткие теоретические сведения; 2 Результаты проведенных исследований), заключение и список использованных источников. Общий объем работы 39 стр.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Краткие теоретические сведения. Одной из главных задач исследователей явления синхронизации было определение условий, при которых происходит синхронизация периодических автоколебаний внешним гармоническим воздействием. В простейшем случае генератор совершает колебания на частоте внешней силы, когда она меняется в конечной окрестности собственной частоты автономного генератора, в так называемой основной области синхронизации.

Связанные генераторы Ван дер Поля являются классическим примером сложной автоколебательной системы, обладающей регулярной динамикой. Большое внимание в исследованиях уделялось связкам из двух, либо трех генераторов, то есть системам с минимальным четным или нечетным числом генераторов.

Основные эффекты, которые демонстрируют два связанных осциллятора – это взаимный захват частот с различным соотношением между ними, двухчастотные квазипериодические колебания и эффект «гибели» колебаний, наблюдающиеся при достаточно большой величине диссипативной связи.

В цепочке трех диссипативно связанных неидентичных осцилляторов Ван дер Поля вариацией связи можно добиться подавления колебания любого из трех осцилляторов. В силу геометрии цепочки, осциллятор, находящийся в ее центре, испытывает большее диссипативное воздействие. Также особенностью является и возникновение дополнительной области гибели колебаний, что связано с «парным» характером взаимодействия осцилляторов и с выполнением резонансных частотных условий.

Одним из направлений исследований является изучение механизмов возникновения хаотизации колебаний связанных генераторов Ван дер Поля. Основные способы получения хаотического режима работы связаны с

параметрическим воздействием посредством автокоммутиации. Выявлено, что введение даже относительно малой задержки в алгоритм параметрической хаотизации приводит к существенному изменению колебательных процессов в связанной системе, как при емкостной, так и при резистивной связи.

В настоящей работе исследуется система с большим числом связанных осцилляторов (их число ограничивается только возможностями численного эксперимента), т.е. цепочка, причем состоящая из чередующихся осцилляторов, отличающихся значениями собственной частоты.

В качестве модели будем исследовать автоколебания в цепочке стандартных осцилляторов Ван дер Поля, каждый из которых описывается уравнением

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} - \varepsilon(1 - x_n^2) \frac{dx_n}{dt} + \omega_{1,2}^2 x_n = \alpha \sum_{k=-k}^{+k} (x_{n+k} - x_n) \quad (1)$$

где левая часть представляет уравнение Ван-дер-Поля, а правая часть описывает связь осцилляторов в цепочке.

Нелинейность и уровень затухания колебаний в каждом осцилляторе характеризует коэффициент ε . Переменная, определяющая состояние осциллятора (координата точки на фазовой плоскости), x_n , зависит от времени t . Для каждого осциллятора могут быть заданы значения $x_n(t_0)$, где t_0 – начальное значение времени.

Параметр ω^2 определяет собственную частоту осциллятора. В исследуемом ансамбле неидентичных осцилляторов двух сортов будем задавать чередующиеся значения ω^2 для «четных» и «нечетных» элементов.

Одной из главных особенностей исследуемой модели является то, что связь между осцилляторами может быть не только локальной ($k=1$), когда n -ый осциллятор связан только с двумя соседними, т.е. с $(n-1)$ -ым и $(n+1)$ -ым, но и с последующими осцилляторами цепочки. При этом варьированием управляющего параметра связи α можно обеспечить повышение, либо ослабление связи в цепочке.

Исследования проводятся посредством компьютерного эксперимента. Для применения численного метода уравнение (1) записывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_n = y_n \\ \dot{y}_n = \varepsilon(1 - x_n^2)y_n - x_n + \alpha \sum_{k=-k}^{+k} (x_{n+k} - x_n) \end{cases} \quad (2)$$

Система уравнений (2) решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка с выбором шага интегрирования, обеспечивающего необходимую точность результатов. Выбор начальных условий описывается ниже. Граничные условия в цепочке предполагались периодическими.

Результаты проведенных исследований. Первоочередной задачей является исследование ансамбля неидентичных осцилляторов с *локальной* связью.

В работе изменяется параметр связи α от 1 до 0, при этом полагая, что при очень сильной связи, $\alpha=1$, происходит взаимная синхронизация всех элементов в цепочки. При *локальной* связи радиус связи $k=1$.

Исследования проводились при частотах нечетных осцилляторов в диапазоне $1 < \omega_{\text{нч}} < 1.5$, т.е. будем говорить, что нечетные осцилляторы – высокочастотные, при этом частота четных осцилляторов была фиксированной, $\omega_{\text{ч}}=1$, т.е. четные осцилляторы - низкочастотные. Далее $\Delta\omega$ будем обозначать разность собственных частот высокочастотного и низкочастотного генераторов.

В процессе моделирования, прежде всего, было выявлено, что при локальном начальном возбуждении всегда устанавливается один и тот же стационарный режим, причем время установления не зависит от того, высокочастотный или низкочастотный осциллятор получает преимущественное начальное возбуждение. Поэтому в дальнейшем этот аспект динамики цепочки не обсуждается, а основное внимание уделяется характеристикам стационарных режимов и их трансформации при изменении параметров.

Сначала анализируется поведение цепочки в асимптотических случаях отсутствия связи между осцилляторами и очень сильной связи между осцилляторами.

Очевидно, что при нулевой связи ($\alpha=0$) осцилляторы колеблются с собственной частотой. О чем свидетельствуют полученные спектры мощности (рисунок 2.1) и фазовые портреты (рисунок 2.2) при расстройке частот $\Delta\omega=0.2$

Нетрудно видеть, что колебания осцилляторов слегка ангармонические, о чем свидетельствует наличие третьей гармоники основной частоты в спектре мощности. Однако, величина этой гармоники столь мала, что можно рассматривать колебания как практически гармонические. Отметим, что вторая гармоника в спектре отсутствует, поскольку нелинейность в осцилляторе Ван дер Поля кубическая, т.е. нечетная. Отметим также, что максимальные значения амплитуд колебаний в обоих осцилляторах практически одинаковые, а максимальные значения производных $y=dx/dt$ на фазовых портретах выше у высокочастотного осциллятора, поскольку $dx/dt \sim \omega x$. Полученные результаты для осциллятора Ван дер Поля хорошо известны и приводятся здесь в основном как свидетельство корректности работы программы численного моделирования и адекватной работы программ вычисления спектров мощности и построения фазовых портретов, необходимых для надежной идентификации сложных колебательных режимов, реализующихся при взаимодействии осцилляторов.

Если же связь между осцилляторами очень сильная, например $\alpha=1$, то наблюдается взаимная синхронизация всех элементов в цепочке для любых $\Delta\omega$ в заданном интервале значений. Из полученной временной реализации (рисунок 2.3) видно, что синхронизация синфазная, но высокочастотные осцилляторы колеблются с меньшей амплитудой, $A=1.8$, в то время как амплитуда колебаний низкочастотных осцилляторов равна $A=2.1$. Колебания обоих осцилляторов практически гармонические, в спектре (рисунок 2.4) присутствует лишь слабая третья гармоника основной частоты, которая для всех осцилляторов одинаковая и равна $\omega=1.1$. Не сложно заметить, что данное значение частоты является средним арифметическим собственных частот колебаний.

Сохраняя значение расстройки собственных частот постоянным ($\Delta\omega=0.2$), уменьшим коэффициент связи до значения, когда синхронизация еще

реализуется. При этом определим два критических значения параметра связи α , первое, при котором колебания становятся негармоническими, но основная частота в спектре является общей, близкой к полусумме собственных частот осцилляторов, и второе, при котором синхронизация полностью разрушается.

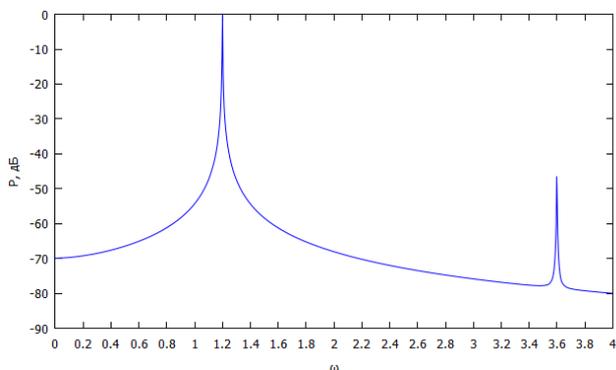


Рисунок 2.1 – Спектр мощности колебаний высокочастотных осцилляторов в отсутствие связи при $\Delta\omega=0.2, \varepsilon=0.1, N=10, \alpha=0, \omega=1.2$

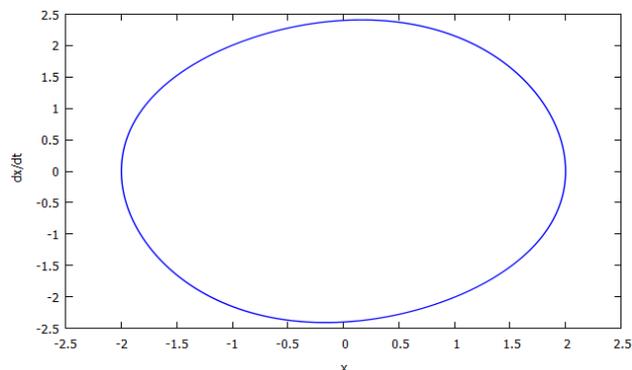


Рисунок 2.2 – Фазовый портрет колебаний высокочастотных элементов ансамбля в отсутствие связи при $\Delta\omega=0.2, \varepsilon=0.1, N=10, \alpha=0, \omega=1.2$

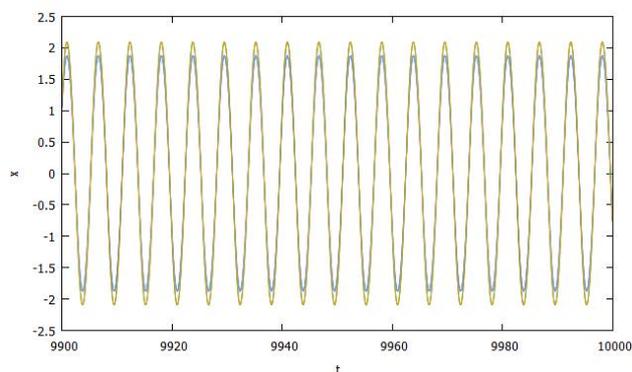


Рисунок 2.3 – Колебания осцилляторов в ансамбле при $\alpha=1$ (желтым цветом показаны колебания низкочастотных осцилляторов, голубым – высокочастотных): $\Delta\omega=0.2, \varepsilon=0.1, N=10, \alpha=1, \omega=1.1$

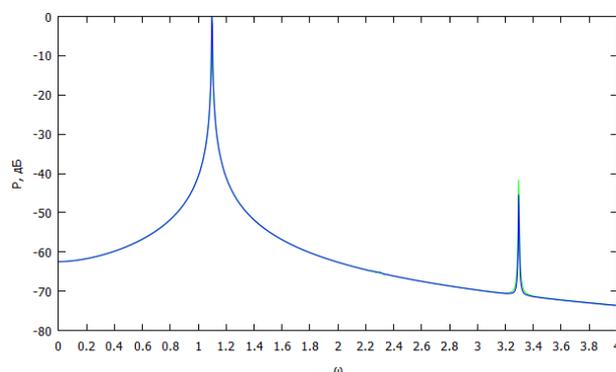


Рисунок 2.4 – Спектр колебаний элементов ансамбля (синим цветом показаны гармоники низкочастотных осцилляторов, зеленым – высокочастотных): $\Delta\omega=0.2, \varepsilon=0.1, N=10, \alpha=1, \omega=1.1$

Результаты проведенных численных экспериментов показали, что режим «сильной связи» реализуется примерно при $\alpha > 0.22$. С уменьшением α от 1, что

рассмотрено выше, до 0.22 наблюдается лишь возрастающая разница амплитуд колебаний у высокочастотного и низкочастотного осцилляторов при сохранении практически гармонической формы колебаний (рисунок 2.5).

В частности, при $\alpha=0.22$ (фиксируются колебания с частотой $\omega = 1.08 \approx (\omega_{вч} + \omega_{нч})/2$ и характеристиками, аналогичными описанным выше. Однако если при $\alpha=1$ разность амплитуд колебаний низкочастотных и высокочастотных элементов имеет величину $\Delta A=0.2$, то вблизи критического значения $\alpha_{крит1}=0.22$ она достигает максимальной величины $\Delta A=0.6$.

Однако уже при $\alpha=0.21$ наблюдаются более сложные периодические ангармонические колебания (рисунок 2.6) Колебания каждого осциллятора можно рассматривать как амплитудно-модулированные с одинаковой несущей частотой $\omega=1.078$ и одинаковой частотой модуляции $\omega_m=0.28$ но их форма, а соответственно, спектры и фазовые портреты существенно различаются. Глубина модуляции низкочастотных колебаний небольшая, амплитуды гармоник в спектре существенно меньше амплитуды несущей, фазовый портрет (рисунок 2.10) выглядит как тор с небольшим поперечным сечением, т.е. они выглядят как слабо-ангармонические. В то же время колебания высокочастотного осциллятора сильно ангармонические, их спектр содержит компоненты, величина которых сравнима с величиной частотной компоненты несущей, а фазовый портрет (рисунок 2.9) имеет более сложную форму. Однако отметим, что траектории на нем замкнутые (это гарантируется тем, что фазовый портрет строился на основе очень длинной реализации), т.е. исследуемые колебания остаются периодическими.

Такой характер колебаний сохраняется в диапазоне $\alpha_{крит2}=0.18 < \alpha < \alpha_{крит1}=0.22$ (рисунок 2.7), а затем синхронизация срывается, и каждый из осцилляторов совершает амплитудно-модулированные колебания, отличные от описанных выше. Теперь осциллятор каждого из двух типов совершает амплитудно-модулированные колебания с разными несущими частотами и одинаковой частотой модуляции, равной разности частот несущих. Глубина

модуляции довольно большая при значениях α , близких ко второму критическому значению $\alpha_{\text{крит}2}=0.18$ и падает при уменьшении α .

В частности, при $\alpha=0.17$ наблюдаются ангармонические периодические колебания сложной формы с одинаковым частотным составом, в которых, однако, разные максимальные частотные компоненты (несущие) при $\omega = \omega^{\text{вч}}=1.33$ у высокочастотного осциллятора и при $\omega=\omega^{\text{нч}}=1.077$) у низкочастотного. При маленьком значении $\alpha=0.01$ колебания обоих осцилляторов становятся близкими к гармоническим (рисунок 2.8), а частоты колебаний близкими к собственным частотам осцилляторов $\omega^{\text{нч}}=1.01$, $\omega^{\text{вч}}=1.21$, и в асимптотике $\alpha \rightarrow 0$ динамика колебаний цепочки взаимодействующих осцилляторов соответствует динамике колебаний несвязанных осцилляторов.

Аналогичные компьютерные эксперименты были выполнены для других значений разности собственных частот высокочастотного и низкочастотного осцилляторов. Также были определены зависимости критических значений $\alpha_{\text{крит}1}$ и $\alpha_{\text{крит}2}$ управляющего параметра от разности собственных частот осцилляторов $\Delta\omega$.

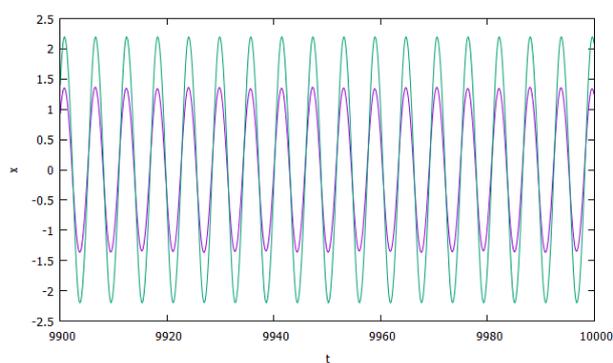


Рисунок 2.5 – Временные реализации колебаний осцилляторов (синим показаны зависимости $x(t)$ для высокочастотных осцилляторов, зеленым – для низкочастотных): $\Delta\omega=0.2$, $\varepsilon=0.1$, $\alpha=0.22$, $\omega=1.08$

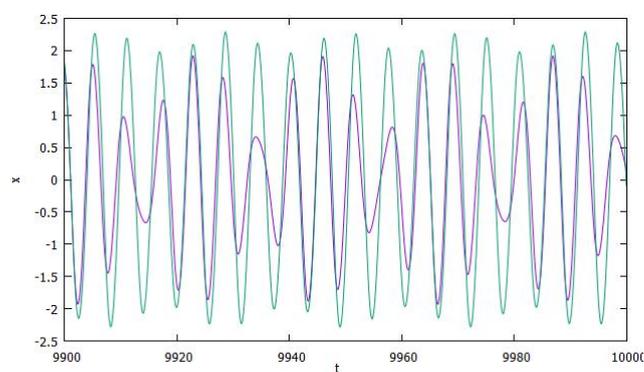


Рисунок 2.6 – Временные реализации колебаний осцилляторов (синим показаны зависимости $x(t)$ для высокочастотных осцилляторов, зеленым – для низкочастотных): $\Delta\omega=0.2$, $\varepsilon=0.1$, $N=10$, $\alpha=0.21$, $\omega=1.078$

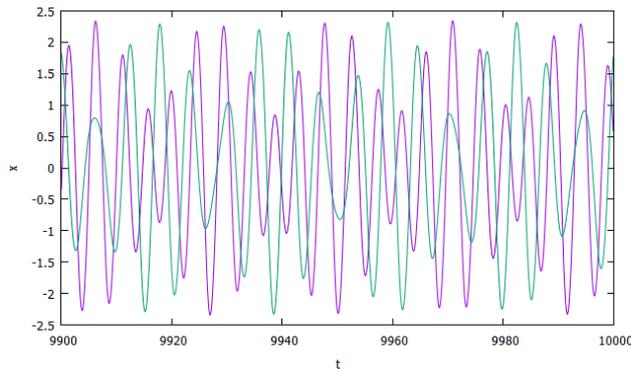


Рисунок 2.7 – Колебания осцилляторов при $\alpha < \alpha_{\text{крит}2}$ (Синим цветом показаны зависимости $x(t)$ для высокочастотных осцилляторов зеленым – для низкочастотных): $\Delta\omega=0.2$, $\varepsilon=0.1$, $N=10$, $\alpha=0.17$, $\omega^{\text{HЧ}}=1.077$, $\omega^{\text{BЧ}}=1.33$

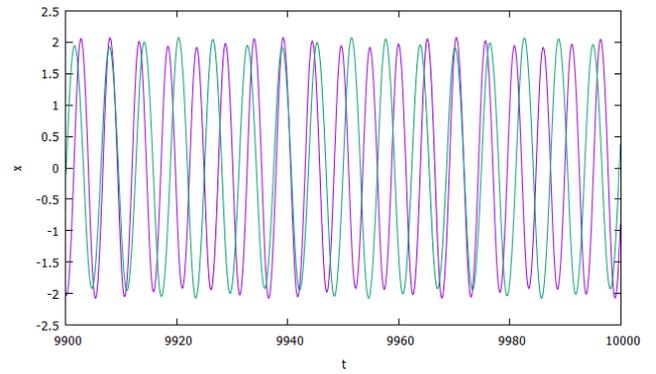


Рисунок 2.8 – Колебания осцилляторов при $\alpha \rightarrow 0$ (Синим цветом показаны зависимости $x(t)$ для высокочастотных осцилляторов, зеленым – для низкочастотных): $\Delta\omega=0.2$, $\varepsilon=0.1$, $N=10$, $\alpha=0.01$, $\omega^{\text{HЧ}}=1.01$, $\omega^{\text{BЧ}}=1.21$

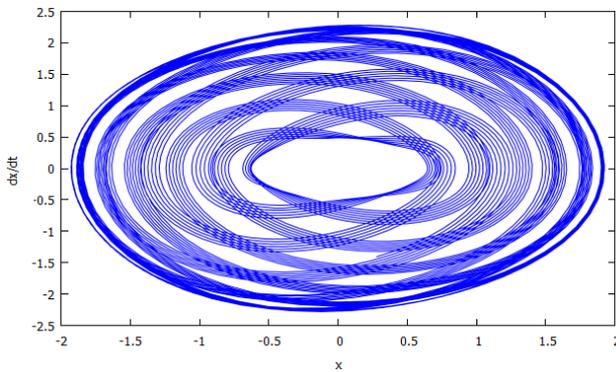


Рисунок 2.9 – Фазовый портрет высокочастотных генераторов ансамбля при $\Delta\omega=0.2$, $\varepsilon=0.1$, $N=10$, $\alpha=0.21$, $\omega=1.078$

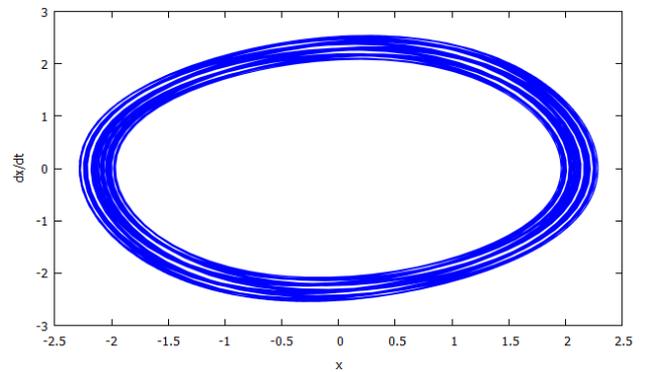


Рисунок 2.10 – Фазовый портрет низкочастотных частотных генераторов ансамбля при $\Delta\omega=0.2$, $\varepsilon=0.1$, $N=10$, $\alpha=0.21$, $\omega=1.078$

Исследуем теперь цепочку, в которой каждый осциллятор соединен не столько с ближайшими соседями, но и с несколькими последующими справа и слева от него. Иными словами, будем рассматривать цепочку с *нелокальной*

связью, где радиус связи $k > 1$. Для радиуса связи $k = 2$, каждый осциллятор будет одновременно взаимодействовать с двумя элементами справа и двумя элементами слева, для $k = 3$ с шестью соседями сразу

Найденные критические значения $\alpha_{\text{крит1}}$ и $\alpha_{\text{крит2}}$ параметра связи для нескольких значений k представлены в работе. Нетрудно понять, что при четных значениях $k = 2m$, $m = 1, 2, \dots$ критические значения управляющего параметра α оказываются такими же как при $k = 2m - 1$, поскольку добавленная связь соединяет идентичные осцилляторы одного сорта, т.е. осцилляторы внутри суб-цепочки. Но для нечетных k критические значения параметров падают, т.е. синхронизация осцилляторов происходит при меньших значениях параметра связи, что означает, что область синхронизации расширяется. Результат представляется естественным, поскольку в режиме синхронизации образование новых связей действует примерно так же, как усиление связи при $k = 1$.

Отметим, что в области $0 < \alpha_{\text{крит2}}$ при $k = 3$ происходит сильное возрастание частоты высокочастотных осцилляторов до значений $\omega^{\text{вч}} = 1.3$, которые также достигаются при $k = 5$. Но в целом закономерности поведения системы при нелокальной связи примерно такие же как и при локальной: при слабой связи колебания каждого осциллятора представляют амплитудно-модулированные колебания с частотой несущей, близкой к собственной частоте осциллятора, при сильной связи осцилляторы генерируют практически гармонические колебания на частоте, близкой к полусумме собственных частот, при значениях параметра $\alpha_{\text{крит2}} < \alpha < \alpha_{\text{крит1}}$ система демонстрирует сложные ангармонические колебания, похожие на амплитудно-модулированные с большой глубиной модуляции. Эти выводы подтверждаются анализом реализаций спектров мощности и фазовых портретов. Опираясь на полученные данные можно сказать, что область синхронизации при увеличении глубины связи расширяется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом численного моделирования с помощью специально разработанной программы исследована динамика цепочки связанных осцилляторов Ван дер Поля с чередующимися значениями собственной частоты, т.е. состоящей из двух связанных суб-цепочек, каждая из которых объединяет осцилляторы с одинаковой собственной частотой, но с различающимися частотами суб-цепочек.

Изучена эволюция поведения цепочки при вариации значений двух основных управляющих параметров цепочки – коэффициента связи и радиуса связи при фиксированной разности собственных частот.

Показано, что для цепочки как с локальной связью, так и с нелокальной связью существует три интервала значений коэффициента связи, в каждом из которых реализуются специфические сценарии колебаний осцилляторов. При сильной связи все осцилляторы генерируют гармонические колебания с одной и той же частотой; при слабой связи осцилляторы генерируют амплитудно-модулированные колебания с разными значениями основной частоты у высокочастотных и низкочастотных осцилляторов, оба из которых растут с ростом коэффициента связи; в промежуточном случае генерируются сложные амплитудно-модулированные ангармонические колебания с одинаковой основной частотой и одинаковой частотой модуляции, но с разными амплитудами гармоник.

Критические значения параметра связи, ограничивающие диапазон промежуточных значений, растут с возрастанием расстройки собственных частот двух типов осцилляторов.

С увеличением радиуса связи критические значения параметра связи уменьшаются.

Вариация значений параметра связи и радиуса связи могут рассматриваться как потенциальные способы управления параметрами синхронизации цепочки неидентичных осцилляторов Ван дер Поля.