Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

Реконструкция динамических систем по точечным процессам

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 03.03.03 «Радиофизика»
физического факультета
Крайнова Ильи Михайловича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ____________________ А.Н. Павлов

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ____________________ В.С. Анищенко

Саратов 2017 год

ВВЕДЕНИЕ

Проблема реконструкции динамических систем [1, 2] по временным рядам является достаточно хорошо изученной и базируется на ряде строгих математических результатов, включая теорему Такенса [1]. До появления этой теоремы считалось, что для анализа динамики сложных систем в фазовом пространстве нужно знать все переменные состояния, то есть эволюцию во времени каждой фазовой переменной, что на практике сложно реализовать – ведь в большинстве экспериментов можно зарегистрировать одну координату состояния.

После работы Такенса возможности анализа нелинейных систем по временным рядам расширились – стало понятно, что неизвестный аттрактор можно реконструировать по временному ряду, применяя метод задержки. С учетом того, что качество реконструкции зависит от выбора ряда параметров (задержки по времени, размерности пространства вложения и др.), при восстановлении аттрактора важно эти параметры выбрать, добившись минимальных геометрических искажений, и в результате по скалярному временному ряду можно вычислить фрактальные размерности хаотического аттрактора или показатели Ляпунова.

Позднее задача реконструкции стала рассматриваться при исследовании динамики сложных систем по точечным процессам. Была доказана теорема Зауэра [3], которая является аналогом теоремы Такенса для точечных процессов типа «накопление-сброс». В дополнение к этой теореме были проведены численные исследования, позволившие выявить границы применимости методов реконструкции в условиях, когда частота генерации импульсов моделью НС является низкой, и условия теоремы Зауэра не выполняются [4, 5]. Были получены численные результаты, свидетельствующие о возможности решить задачу реконструкции по другому типу точечных процессов, который генерируется моделями типа «пересечение порога» [6]. Модели ПП описывают динамику ряда нейронов.

Несмотря на то, что задача реконструкции по точечным процессам достаточно детально описана в литературе, тем не менее существует ряд открытых вопросов. Например, подавляющее большинство исследований ограничиваются рассмотрением обобщенной модели «накопление-сброс», которая моделирует динамику сенсорного нейрона, генерирующего кратковременный импульс (спайк напряжения), если достигается заданный пороговый уровень, и не демонстрирующего никакой электрической активности, пока порог не достигнут.

Но в природе существуют разные типы нейронов, которые описываются разными моделями. Наряду с нейронами, откликающимися только на определенное воздействие, существуют нейроны-осцилляторы. Они постоянно генерируют, например, периодические последовательности импульсов, а входной сигнал модулирует частоту генерации, и именно такой модулированный по частоте точечный процесс и несет в себе информацию о воздействующем сигнале.

Целью данной выпускной квалификационной работы является изучение возможности реконструкции динамических систем по точечным процессам, генерируемым моделью Гласса-Мэкки, которая описывает динамику нейрона, демонстрирующего электрическую активность в отсутствие сигнала на входе.

Материалы исследования. Исследования проводились на основе реконструкции динамических систем по временным рядам. В качестве метода исследования использовались расчеты корреляционной размерности аттрактора и нормированной ошибки предсказания.

Выпускная квалификационная работа содержит введение, две главы (1 – Краткие теоретические сведения о проблеме реконструкции по точечным процессам модели «накопление-сброс»; 2 – Результаты проведенных исследований), заключение и список использованных источников. Общий объем работы 40 стр.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Краткие теоретические сведения о проблеме реконструкции по точечным процессам модели «накопление-сброс». Будем считать, что моделью НС описывается динамика некоторого порогового устройства, которое осуществляет преобразование непрерывного во времени сигнала $S(t)$, поступающего на вход, в последовательность одинаковых по форме импульсов на выходе. Будем рассматривать преобразование для случая, когда сигнал $S(t)$ является хаотическим и генерируется системой с малой размерностью фазового пространства. Модель НС предусматривает интегрирование входного сигнала, начиная с начального момента времени T_0. В моменты времени T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, когда интеграл принимает фиксированное значение (достигается пороговый уровень θ), осуществляется генерация стереотипного одиночного импульса (спайка), и после этого величина интеграла устанавливается равной нулю. Описанная процедура задается в виде уравнения

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t)dt = \theta, \tag{1}$$

путем решения которого вычисляется временной промежуток между последовательными импульсами

$$I_i = T_{i+1} - T_i. \tag{2}$$

Далее по последовательности временных интервалов между импульсами (межимпульсных интервалов, МИ) можно решить задачу реконструкции аттрактора, соответствующего входной динамике, и вычислить его метрические и динамические характеристики. Соответствующая задача реконструкции позволяет по последовательности МИ вычислять характеристики режима динамики, соответствующего сигналу $S(t)$. Отметим, что реконструкция может быть проведена при высокой частоте генерации импульсов, то есть при малых значениях МИ.

Возможность реконструкции ранее была строго обоснована в рамках теоремы Зауэра [3], которая является одним из фундаментальных научных результатов в области реконструкции динамических систем по точечным процессам. Не вдаваясь в детали теории, обосновать возможность реконструкции можно в ходе сравнительно простых рассуждений, взяв за основу формулу (1). Если речь идет о межимпульсных интервалах I_i малой длительности, то задача численного интегрирования сводится к нахождению площади под кривой $S(t)$ для малого шага по времени. В этих условиях достаточно использования простейшего варианта численного интегрирования – метода прямоугольников, в рамках которого мы заменяем интеграл (1) суммой

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t)dt \approx S\left(\frac{T_i + T_{i+1}}{2}\right) I_i. \qquad (3)$$

Очевидно, что чем меньше I_i, тем точнее будет оценка искомой площади под кривой. Учитывая формулу (1), по выходной последовательности МИ легко вычисляются значения входного сигнала $S(t)$ в эти моменты времени:

$$S\left(\frac{T_i + T_{i+1}}{2}\right) \approx \frac{\theta}{I_i}. \qquad (4)$$

При уменьшении I_i будет возрастать точность восстановления входного сигнала. Если частота генерации импульсов уменьшается, то происходит рост ошибки численного интегрирования, и равенство (4) становится менее точным. Это приводит к ограничению рассматриваемого подхода. Взяв за основу теорему о среднем значении, определим моменты времени $\hat{t}_i$, в которые выполняется точное равенство:

$$S(\hat{t}_i) = \frac{\theta}{I_i}, \quad T_i \le \hat{t}_i \le T_{i+1}. \qquad (5)$$

Но мы располагаем только последовательностью времен T_i, и в остальные моменты времени информация о динамике на входе порогового устройства нам недоступна. Вследствие этого возникает неопределенность δ нахождения величин $\hat{t}_i$

$$\hat{t}_i = \left(\frac{T_i + T_{i+1}}{2} + \delta_i \right) \tag{6}$$

При больших значениях θ эта неопределенность также является большой. С ростом неопределенности δ растут ошибки восстановления выборочных значений $S(\hat{t}_i)$, что приводит к ограничениям возможности реконструкции динамических систем по точечным процессам и расчета количественных характеристик сложной динамики и сложной геометрии. Чтобы применять метод реконструкции в его стандартном варианте, выборки (5) интерполируются гладкой функцией (обычно кубическим сплайном), так как данная математическая процедура позволяет ввести постоянный шаг по времени.

В качестве основного метода исследования в работе выбрана корреляционная размерность аттрактора. Корреляционная размерность аналогична емкости, но при этом учитывает вероятность посещения фазовой траекторией различных участков аттрактора [7, 8]. Чтобы проводить расчеты по временному рядя $\vec{x}(i\Delta t)$, решается задача реконструкции. После этого выбирается произвольная точка $\vec{x}_i$, принадлежащая аттрактору. Далее вычисляется число точек $\vec{x}_j$ (которое мы обозначим как $k_i(\varepsilon)$), которое попадает внутрь шара радиусом ε с центром в точке $\vec{x}_i$. Вероятность попадания точки, расположенной на аттракторе, в такой шар, усредненная по всем точкам аттрактора, носит название корреляционного интеграла

$$C(\varepsilon, N) = \frac{1}{N} \sum_i P_i(\varepsilon, N). \tag{7}$$

По сути, данное выражение представляет собой отношение числа пар точек, расстояние между которыми $|\vec{x}_j - \vec{x}_i|$ меньше ε, к полному числу возможных пар. Корреляционная размерность (или корреляционный показатель) v характеризует свойство масштабной инвариантности корреляционного интеграла [9]

$$v = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{\ln C(\varepsilon, N)}{\ln \varepsilon}, \tag{8}$$

$$C(\varepsilon, N) = N^{-2} \sum_{i \neq j} \theta\left(\varepsilon - \left|\vec{x}_i - \vec{x}_j\right|\right), \tag{9}$$

где N - число точек в фазовом пространстве, θ - функция Хевисайда, $\vec{x}_i = \vec{x}(i\Delta t),\ \vec{x}_j = \vec{x}(j\Delta t)$. При расчетах N не бесконечно, потому пределы $\varepsilon \to 0$ и $N \to \infty$ не могут быть рассмотрены, и расчет отношения $\ln C(\varepsilon, N) / \ln \varepsilon$ проводится в достаточно широком диапазоне изменения ε.

Результаты проведенных исследований. В ходе выполнения работы был рассмотрен вариант модели НС, предложенный в работах Гласса и Мэкки. Эта модель похожа на обобщенную модель НС, за исключением того, что она демонстрирует периодические «зажигания» (генерацию импульсов) и в отсутствие входного сигнала. Данный случай является важным при изучении процессов кодирования информации нейронами и их ансамблями, поскольку часть нейронов представляют собой биологические осцилляторы, которые генерируют спайки напряжения в отсутствие сигнала на входе. Информационный сигнал таких нейронов кодируется путем модуляции частоты генерации спайков [10].

В рамках модели Гласса-Мэкки внешний сигнал модулирует величину порогового уровня. Рассмотрим в качестве входного процесса временную реализацию одной из координат системы Рёсслера. Модель НС Гласса-Мэкки осуществляет более частую генерацию импульсов на выходе при малых значениях сигнала на входе и редкую – при больших. Это противоположный эффект с точки зрения динамики обобщенной НС-модели, которая демонстрирует более частую генерацию импульсов при больших значениях сигнала на входе. Нейронная активность в случае модели Гласса-Мэкки описывается следующей формулой

$$V(t) = \alpha t + \beta, \tag{10}$$

$$V(T_n^+) = 0 \qquad V(T_n) = S(T_n).$$

В данном случае также рассматривается смещение входного сигнала, но в меньшей степени, чем для обобщенной модели НС, например, $S(t) = x(t) + 10$. Константа добавляется для того, чтобы входной сигнал был везде положительным, так как порог должен находиться выше точки переустановки (обнуления) напряжения.

Были рассмотрены два разных значениях константы α, а именно: $\alpha = 10$, при котором импульсы генерируются часто, и $\alpha = 1$, при котором частота генерации импульсов является малой. В первом случае ожидается, что последовательность интервалов между импульсами сохраняет сведения о динамике, которых достаточно для того, чтобы провести «хорошую» реконструкцию аттрактора системы Рёсслера по точечному процессу (последовательности МИ на выходе модели «накопление-сброс» Гласса-Мэкки), то есть правильно вычислить основные характеристики аттрактора.

Во втором случае временные интервалы между последовательными импульсами становятся больше времени предсказуемости (в качестве оценки которого берется величина, обратная старшему ляпуновскому показателю). Это приводит к потере корреляций между последовательными координатами реконструируемых векторов в фазовом пространстве. Ожидается, что при этом будет ухудшаться качество реконструкции, появляться более значительные погрешности вычисления характеристик хаотического аттрактора, реконструированного по последовательности МИ. Проведенные исследования были направлены на проверку данных предположений.

Отметим, что в случае $\alpha = 10$ на характерный период колебаний приходится порядка 4-х отсчетов, а при $\alpha = 1$ примерно 1 отсчет приходится на 2 характерных периода колебаний. Априори сложно сказать, можно ли охарактеризовать динамику системы, располагая, например, 1-2 отсчетами на период. Например, при решении задачи реконструкции аттрактора по последовательности времен возврата (другой тип точечных процессов) фактически 1 отсчет на период (время возврата) позволяет проводить расчеты фрактальной размерности и старшего показателя Ляпунова. Если же на характерный период приходится менее 1 отсчета, это должно препятствовать проведению реконструкции динамических систем по последовательности МИ.

При реконструкции фазовых портретов по последовательностям МИ методом задержки для случаев $\alpha = 1$, $\alpha = 3$ и $\alpha = 11$ было отмечено, что первый фазовый портрет визуально не позволяет судить о структуре аттрактора Ресслера, поскольку в нем присутствуют большие значения (пропуски 2-3 характерных периодов колебаний), на фоне которых незначительные вариации малых МИ почти не заметны. Второй фазовый портрет является более похожим на нелинейное преобразование аттрактора Рёсслера, и по нему можно ожидать, что будет проведена оценка характеристик хаотического режима динамики системы Рёсслера, приближенная к ожидаемым величинам. Третий фазовый портрет визуально менее похож на аттрактор системы Рёсслера, но соответствующая реконструкция, тем не менее, должна быть лучше, чем в первом случае. Были проведены расчеты корреляционной размерности. Поскольку данная величина определяется по наклону зависимости корреляционного интеграла от размера элемента покрытия (в двойном логарифмическом масштабе), на рисунке показаны локальные наклоны на разных масштабах. Отличия наклонов будут наблюдаться, если аттрактор имеет выраженные мультифрактальные свойства (а большинство хаотических аттракторов на самом деле являются мультифрактальными объектами). Несмотря на некоторые вариации вычисляемых наклонов (которые могут быть дополнительно связаны с ограниченным объемом выборки – рассматривались последовательности из 100 000 МИ), средние значения наклонов позволяют сделать оценку корреляционной размерности

В соответствии с полученными результатами, при $\alpha = 1$ получается заниженное значение размерности: υ=1.3-1.4. Это слишком малая величина. Для аттрактора Рёсслера в хаотическом режиме величина фрактальной размерности (емкости) должна составлять примерно 2.01–2.1 (при разных значениях параметров). Корреляционная размерность, вычисленная по полной фазовой траектории системы Рёсслера, составляет 1.8-1.9. Поэтому ожидаемая величина υ при расчетах по последовательности МИ должна составить примерно 1.8-1.9. В случае $\alpha = 1$ погрешность оценки υ составляет около 30%, что является большим значением, свидетельствующим о том, что реконструированный аттрактор заметно отличается по своим характеристикам от исходного. При $\alpha = 3$ результаты существенно лучше – погрешность оценки υ находится в пределах 5%, а это очень хороший результат при расчете характеристик аттрактора по временным рядам. Отметим, что в данном случае средняя длительность МИ примерно соответствует одному базовому периоду колебаний. Если же увеличить α, рассмотрев, например, $\alpha = 11$, то мы получим более подробные сведения о режиме динамики системы Рёсслера, так как на один базовый период будут приходиться примерно по 3 отсчета. Из общих соображений, точность расчета характеристик реконструированного аттрактора должна быть выше. Но на практике мы наблюдаем другую картину – значение υ уменьшается примерно до величины 1.55, приводя к погрешности около 16%. Эта величина близка к допустимым погрешностям оценки характеристик аттрактора по временным рядам относительно небольшой длительности (около 10%).

Расчеты нормированной ошибки предсказания (*NPE*) свидетельствуют о том, что выбор параметра $\alpha = 3$ модели Гласса-Мэкки приводит к наибольшей величине. Она снижается при $\alpha = 1$, что, предположительно вызвано тем обстоятельством, что в этом случае осуществляется прогноз не изменений *NPE*, обусловленных динамикой системы Рёсслера, а вероятности пропуска одного или нескольких базовых периодов. При $\alpha = 11$ получена сопоставимая величина *NPE*, как и в случае $\alpha = 3$. Таким образом, существенные отклонения наблюдаются только при заведомо плохой реконструкции, когда происходят пропуски части осцилляций входного сигнала.

В случае $\alpha = 3$ последовательность МИ характеризуется небольшим разбросом значений (сравнительно узким распределением), тогда как при $\alpha = 11$ ширина распределения становится намного больше. Это позволяет сделать вывод о том, что на качество реконструкции хаотического аттрактора по точечным процессам модели НС Гласса-Мэкки оказывает существенное влияние не только объем выборки и частота генерации импульсов, но и ширина распределения МИ. В случае точечных процессов с узким распределением МИ качество реконструкции существенно выше, чем для точечных процессов с широким распределением МИ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе решалась задача реконструкции динамических систем по точечным процессам на примере точечных процессов модели Гласса-Мэкки. В качестве входного сигнала были выбраны хаотические колебания в динамике системы Рёсслера в режиме фазо-когерентного хаоса. В отличие от обобщенной модели НС, модель Гласса-Мэкки описывает динамику нейронов, которые осуществляют генерацию периодических сигналов на выходе в отсутствие внешнего воздействия, а внешний сигнал приводит к появлению модуляции частоты генерации.

Чтобы охарактеризовать качество реконструкции, были выбраны две количественные меры – корреляционная размерность и нормированная ошибка предсказания. Обе эти меры вычисляются после проведения реконструкции динамических систем по последовательности межимпульсных интервалов.

В ходе проведенных исследований было показано, что для обеспечения хорошей точности расчета характеристик хаотического аттрактора по временным интервалам (с ошибкой, не превышающей 10%) важно не только обеспечивать достаточную длительность последовательности МИ и относительно небольшие значения интервалов между последовательными импульсами, но и небольшой разброс значений МИ относительного среднего (малую ширину распределения МИ). В частности, была продемонстрирована возможность вычислить корреляционную размерность аттрактора системы Рёсслера по последовательности МИ с погрешностью около 5% по сравнению с расчетами, выполненными по полной фазовой траектории системы Рёсслера.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Takens F. Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // Dynamical systems and turbulence ; ed. by Rang D., Young L. S. – 1980. –Vol. 898. – P. 366–381.

[2] Packard, N. H. Geometry from a time series / N. H. Packard, J. R. Crutchfield, J. D. Farmer, R. S. Shaw // Phys. Rev. Lett. – 1980. –Vol. 45. –P. 712–716.

[3] Sauer T. Reconstruction of integrate–and–fire dynamics / T. Sauer // Nonlinear dynamics and time series; ed. by Culter C., Kaplan D. – 1997. –Vol. 11. – P. 63–75.

[4] Racicot, D. M. Interspike interval attractors from chaotically driven neuron models / D. M. Racicot, A. Longtin // Physica D. – 1997. – Vol. 104. – P. 184–204.

[5] Castro, R. Correlation dimension of attractors through interspike intervals / R. Castro, T. Sauer // Phys. Rev. E. – 1997. – Vol. 55. – P. 287–290.

[6] Pavlov, A. N. Extracting dynamics from threshold–crossing interspike intervals: possibilities and limitations / A. N. Pavlov, O. V. Sosnovtseva, E. Mosekilde, V. S. Anishchenko // Phys. Rev. E. – 2000. – Vol. 61, № 5. P. 5033–5044.

[7] Kantz, H. Nonlinear Time Series Analysis / H. Kantz, T. Schreiber. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[8] Hentschel, H. G. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors / H. G. Hentschel, I. Procaccia // Physica D. – 1983. – Vol. 8. – P. 435–444.

[9] Grassberger, P. Measuring the strangeness of strange attractors / P. Grassberger, I. Procaccia // Physica D. – 1983. – Vol. 9. – P. 189–208.

[10] Tuckwell, H. C. Stochastic processes in the neurosciences / H. C. Tuckwell. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.