Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

Вычисление старшего показателя Ляпунова по зашумленным точечным процессам

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направления 03.03.03 «Радиофизика»
физического факультета
Куприяшкиной Наталии Михайловны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ____________________ А.Н. Павлов

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ____________________ В.С. Анищенко

Саратов 2017 год

ВВЕДЕНИЕ

Точечные процессы – это такая разновидность случайных или детерминированных процессов, в которых информация о динамике содержится не во временных зависимостях измеряемых величин, а в моментах времени следования каких-то повторяющихся событий, например, во временах появления импульсов характерной формы на выходе пороговых устройств, моментах времени пересечения секущей плоскости фазовой траекторией (в случае анализа динамики хаотических осцилляторов) и т.д. Большое внимание тематика точечных процессов привлекала в нейродинамике, поскольку именно точечные процессы осуществляют передачу информации от сенсорных нейронов в кору головного мозга. Аспекты функционирования индивидуальных нейронов с точки зрения происходящих биофизических процессов были изучены достаточно давно, и в данной области почти не осталось принципиальных открытых вопросов. Однако этого нельзя сказать об информационной составляющей функционирования нейронов и их ансамблей. До сих пор принципы кодирования информации в нейронных сетях полностью не понятны.

При этом нужно сказать, что даже если не брать большие нейронные сети, где открытых вопросов значительно больше, а ограничиться индивидуальным нейроном, то и в этом случае открытые вопросы остаются. Например, если использовать самую простую модель, описывающую динамику нейрона – модель «накопление-сброс» (или, в дословном переводе с англоязычных источников, модель «интегрируй и стреляй» (integrate-and-fire) [1, 2]), то даже для нее нет полной ясности. С одной стороны, если ориентироваться на теорему Зауэра [3], то по выходному процессу данной модели можно полностью охарактеризовать динамику на входе, представив выходной процесс как нелинейное преобразование входного. Но, с другой стороны, теорема Зауэра справедлива в определенных условиях – при высокой частоте генерации импульсов моделью «накопление-сброс» (НС). Возможности охарактеризовать входную динамику по выходному процессу при низкой частоте генерации не гарантированы. То же самое относится и к другим простейшим моделям нейронной динамики, например, модели «пересечения порога» (ПП). Для нее до сих пор нет теоретического обоснования возможности реконструкции динамики на входе по точечному процессу на выходе [4].

Помимо отсутствия строгих теоретических работ, формулирующих границы применимости методов реконструкции динамических систем по точечным процессам, существует еще одна открытая проблема. В большинстве проведенных к настоящему времени исследований задача реконструкции обсуждалась только для детерминированной динамики [1–4], что важно с точки зрения понимания теоретических основ методов реконструкции, но не столь актуально для изучения более реалистичной проблемы анализа динамики пороговых систем на практике. Если рассматривать сенсорный нейрон, то он представляет собой пороговое устройство, на вход которого поступает не только один информационный (или «полезный» сигнал). Дополнительно на вход нейрона приходят сигналы от различных источников, которые можно интерпретировать как помеху, влияющую на структуру выходного точечного процесса.

Целью выпускной квалификационной работы является изучение границ применимости модифицированного метода расчета старшего показателя Ляпунова для диагностики режимов маломерного хаоса по зашумленным точечным процессам.

Материалы исследования. Исследования проводились на основе математического моделирования и анализа моделей автоколебательных систем со сложной динамикой. В качестве основного инструмента исследования выбран метод расчета старшего показателя Ляпунова [5].

Выпускная квалификационная работа содержит введение, две главы (1.Методы исследования и основные результаты предыдущих работ; 2 Результаты проведенных исследований), заключение и список использованных источников. Общий объем работы 43 стр.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Методы исследования и основные результаты предыдущих работ. Задача реконструкции динамических систем по точечным процессам состоит в том, что ориентируясь на последовательность импульсов на выходе порогового устройства, то есть исследуя последовательность времен генерации импульсов T_i, необходимо охарактеризовать свойства входного процесса и количественно описать режим динамики. Чаще всего с этой целью рассматривают две основные модели пороговых систем: НС и ПП), учитывая, что они являются наиболее простыми, и для них проведенные численные исследования могут быть частично подкреплены аналитическим рассмотрением задачи о преобразовании входного сигнала.

Сначала проведем анализ модели НС. Она была рассмотрена в ряде работ [1–3], связанных с решением задачи идентификации состояния динамической системы по последовательности T_i. Согласно терминологии, используемой в зарубежной литературе, ее называют «integrate-and-reset» или «integrate-and-fire» (дословный перевод «интегрируй и стреляй»). Данная модель очень распространена в задачах, связанных с изучением динамики нейронов и их ансамблей [6]. Такие модели встречаются и в радиофизике, например, при рассмотрении сигма-дельта модуляции [7]. Точечные процессы, генерацию которых описывает НС-модель, являются более простыми по сравнению с последовательностями времен возврата. Для них, например, доказана возможность реконструкции динамической системы в виде теоремы вложения Зауэра [3], аналогичной теореме Такенса [8] для временных зависимостей фазовых переменных.

При рассмотрении НС-модели, описывающей преобразование детерминированных процессов, в качестве сигнала $S(t)$ на входе порогового устройства преимущественно выбирают линейное преобразование одной из переменных маломерной динамической системы, демонстрирующей режим автоколебаний, или, в частных случаях, функцию нескольких переменных. При этом обычно рассматривают режим хаотических автоколебаний как наиболее сложный (например, для периодических входных сигналов последовательность временных интервалов между генерируемыми импульсами также будет периодической). Начиная с некоторого момента T_0, сигнал $S(t)$ интегрируется, а времена T_i, когда интеграл достигает заданное пороговое значение θ, определяются уравнением:

$$\int_{T_i}^{T_i+1} S(t)dt = \theta, \qquad I_i = T_{i+1} - T_i. \tag{1}$$

При достижении порога генерируется кратковременный импульс, после чего значение интеграла обнуляется, и интегрирование продолжается снова.

Модель ПП предполагает выбор уровня θ, который задает уравнение секущей $S = \theta$, и запись интервалов времени между пересечениями данного уровня сигналом $S(t)$ в одном направлении, к примеру, снизу вверх. Интервалы I_i соответствуют временам возврата в секущую плоскость.

Помимо изучения динамики нейронов, анализ последовательностей межимпульсных интервалов (МИ) может проводиться при решении других задач, когда нельзя осуществить регистрацию полной реализации интересующего процесса $S(t)$, и остается единственный доступный сигнал, представляющий собой последовательность времен T_i. Преобразование сигнала на входе порогового устройства в выходную последовательность импульсов часто изучалось с позиции теории информации [2].

При рассмотрении режимов хаотических колебаний, когда входным сигналом является одна из переменных, описывающих состояние системы, анализ последовательностей МИ может позволить вычислить характеристики хаотического режима колебаний на входе порогового устройства, например, фрактальные размерности или показатели Ляпунова [9]. Стоит отметить, что при высокой частоте генерации межимпульсные интервалы I_i, которые описываются НС-моделью [2], позволяют восстановить входной сигнал $S(t)$. Ранее было продемонстрировано решение задачи реконструкции аттрактора, соответствующего входному сигналу, по последовательности I_i методом задержки [2]. Проводились вычисления корреляционной размерности [1, 3]. Было сформулировано доказательство теоремы вложения для временных интервалов модели «накопление-сброс» (теорема Зауэра [3]). Эта теорема может рассматриваться как аналог теоремы Такенса [8] для случая точечных процессов.

Подводя итог вышесказанного, можно отметить, что теоретическим обоснованием возможности реконструкции динамических систем по точечным процессам и расчета характеристик хаотических автоколебаний по последовательностям МИ НС-модели является теорема Зауэра [3]. Строгого обоснования реконструкции динамических систем по последовательностям времен возврата в настоящее время нет. Но путем численного анализа было показано [4], что по последовательностям времен возврата можно с хорошей точностью (ошибкой менее 10%) вычислять значения старшего показателя Ляпунова и корреляционной размерности.

В работе рассмотрена модификация метода расчета старшего показателя Ляпунова [5] для случая точечных процессов при наличии шума, состоящая в построении зависимостей λ_1 от максимальной ошибки ориентации *a*, то есть от угла между векторами возмущения до и после перенормировки, при условии, что новое возмущение выбирается путем минимизации длины вектора в диапазоне [l_{min}, l_{max}]. Как можно предположить априори, при больших углах должны расти составляющие вектора возмущения в направлениях, ортогональных направлению максимального разбегания траекторий, что приводит к недооценке величины λ_1. Помимо этого, можно ожидать уменьшения значений показателя Ляпунова в области малых углов a, так как в этом случае снижается вероятность нахождения подходящего вектора и происходят частые выходы за границу линейного приближения. Ранее было показано, что оптимальное значение α соответствует максимуму кривой $\lambda_1(\alpha)$. Оно позволяет осуществлять наиболее точное определение скорости экспоненциального разбегания траекторий на хаотическом аттракторе. Более того, по поведению зависимости $\lambda_1(\alpha)$ в области больших углов можно судить об уровне шума в точечном процессе.

Результаты проведенных исследований. В данной выпускной квалификационной работе задача реконструкции решается для динамических систем, генерирующих хаотические бёрсты – «пачки» импульсов с меняющимися временными интервалами между моментами генерации. Для восстановления хаотического аттрактора по последовательностям межбёрстовых интервалов применяется метод, предложенный в работе [4]. Расчет старшего показателя Ляпунова (λ_1) по реконструированному аттрактору проводится методом [5]. В соответствии с этим подходом, анализируется средняя скорость экспоненциального разбегания траекторий; при этом выбирается базовая траектория и задается вектор возмущения, изменение размера которого во времени позволяет оценивать степень хаотичности. При выходе за границы линейного приближения проводятся перенормировки, в ходе которых задается новый вектор возмущения – меньшей длины и ориентированный в направлении максимального разбегания траекторий. При анализе динамики хаотических систем по временным рядам необходим компромисс между минимизацией длины этого вектора и минимизации ошибки ориентации α, так как одновременно два этих условия не могут быть достигнуты. Часто используемый на практике прием состоит в задании диапазона возможных значений вектора [l_{min}, l_{max}] при сохранении его ориентации [10]. Анализ зависимости $\lambda_1(\alpha)$ позволяет не только повысить точность проводимых расчетов, но и определить условия, при которых наличие аддитивного шума не препятствует правильной оценке степени хаотичности анализируемого динамического режима.

В качестве системы с несколькими временными масштабами, демонстрирующей режим бёрстов, была выбрана модель панкреатической бета-клетки

$$\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt} = (-I_{Ca} - I_K - g_S S(V - V_K))/\tau,\\
&\frac{dn}{dt} = \mu(n_\infty - n)/\tau,\\
&\frac{dS}{dt} = (S_\infty - S)/\tau_S,\\
&I_{Ca}(V) = g_{Ca} m_\infty (V - V_{Ca}),\\
&I_K(V,n) = g_K n(V - V_K),\\
&x_\infty = \frac{1}{1+\exp((V_x - V)/\theta_x)}, \quad x = m,n,S
\end{aligned} \qquad (2)$$

при следующих значениях управляющих параметров $g_{Ca} = 3.6$, $g_K = 10.0$, $g_S = 4.0$, $\tau = 20$ мс, $\tau_S = 35$ с, $V_{Ca} = 25$ мВ, $V_K = -75$ мВ, $V_m = -20$ мВ, $V_n = -16$ мВ, $V_S = -40$ мВ, $\theta_m = 12$ мВ, $\theta_n = 5.6$ мВ, $\theta_S = 10.0$ мВ, $\mu = 0.85$, приводящих к генерации хаотических колебаний с показателем Ляпунова $\lambda_1 = 0.011$. В модели (2) переменная V представляет собой напряжение на мембране клетки, временная зависимость которого исследовалась, n характеризует изменение числа открытых калиевых каналов, а S – внутриклеточную концентрацию кальция.

Чтобы изучить возможность диагностики соответствующего режима по последовательности межбёрстовых интервалов, вначале был рассмотрен случай детерминированной динамики, и в качестве анализируемого сигнала выбрана последовательность, содержащая 3000 интервалов времени между соседними максимумами реализации $V(t)$. Учитывая, что в пределах одного бёрста интервалы времени между последовательными импульсами существенно меняются, и эти изменения являются еще более выраженными между соседними бёрстами, полученная последовательность характеризуется широким распределением временных интервалов и проводит к неоднородности реконструированного аттрактора.

Зависимость старшего показателя Ляпунова от максимальной ошибки ориентации (α) вектора возмущения [5], вычисленная по последовательности межбёрстовых интервалов, приводит к появлению четко выраженного максимума, соответствующего теоретически ожидаемому значению λ_1. Причиной спада вычисляемой величины слева от максимума является увеличение длины вектора возмущения и выход за границы линейного приближения. Справа от максимума недооценка λ_1 связана с увеличением составляющих вектора возмущения в направлениях, ортогональных направлению максимального разбегания траекторий.

При добавлении аддитивного шума в последовательность межбёрстовых интервалов происходит изменение характера поведения зависимости $\lambda_1(\alpha)$ в области больших углов, которое обусловлено влиянием дополнительного (индуцированного шумом) разбегания траекторий. С ростом интенсивности аддитивного шума максимум, который наблюдался в случае детерминированной динамики, пропадает, и рассматриваемый метод не позволяет количественно охарактеризовать режим динамического хаоса в системе (2) по сигналам, регистрируемым при наличии помех. Зависимость λ_1 (α) включает два важных маркера – наличие максимума в области сравнительно небольших углов, который позволяет вычислить значение старшего показателя, наиболее близкое к ожидаемому значению, а также участок спадающей зависимости $\lambda_1(\alpha)$ справа от максимума, размер которого характеризует степень влияния помех на результаты вычислений. Если размер этого участка уменьшается, и при некоторой интенсивности аддитивного шума максимум пропадает, то правильная оценка старшего показателя Ляпунова незашумленного режима динамики не может быть проведена.

Таким образом, в ходе проведенных исследований установлено наличие общих закономерностей зависимости старшего показателя Ляпунова, вычисленного по последовательностям времен возврата в секущую Пуанкаре, от максимальной ошибки ориентации вектора возмущения в реконструированном фазовом пространстве (как для режимов детерминированного хаоса, так и для режимов зашумленных хаотических колебаний). Это позволяет обобщить методику анализа динамики систем по временам возврата на широкий класс нейронных осцилляторов.

Дополнительно в данной выпускной квалификационной работе были проанализированы режимы нехаотической динамики с тем, чтобы выявить различия зависимостей старшего показателя Ляпунова от максимальной ошибки ориентации векторов в реконструированном фазовом пространстве. Кроме того, был рассмотрен случай, когда анализируемый точечный процесс является стохастическим и не содержит маломерной детерминированной динамики. В качестве примера может служить цветной шум. Для проведения расчетов проводилась фильтрация белого шума с помощью полосно-пропускающего фильтра, и полученный сигнал со смещенным средним уровнем был рассмотрен в качестве анализируемого точечного процесса. В этом случае ожидается, что вычисленная зависимость $\lambda_1(\alpha)$ будет являться монотонно возрастающей, не содержащей ни характерных максимумов, ни плато в области сравнительно небольших значений угла α. Проведенные расчеты это подтверждают.

Отдельного упоминания заслуживает случай многомерного хаоса, который генерируется системами с задержкой, например, моделью Мэкки-Гласса. При анализе динамики таких систем по точечным процессам, рассматриваемый модифицированный метод вычисления старшего показателя Ляпунова не позволяет получить значения старшего показателя Ляпунова, близкие к ожидаемым значениям λ_1, если рассматриваются сравнительно небольшие последовательности времен возврата (2000 – 3000 тысячи отсчетов, по аналогии с предыдущими моделями и тестовыми примерами).

Предположительно, это связано с фундаментальными ограничениями, существующими при расчете показателей Ляпунова, в соответствии с которыми для проведения количественных оценок степени хаотичности режимов многомерного хаоса требуются очень длительные реализации, и приемлемые оценки могут быть достигнуты только для большого объема выборки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена задача диагностики режимов хаотических автоколебаний по точечным процессам в присутствии шума. Если ранее аналогичные исследования проводились на примере систем с фазо-когерентным хаосом, таким как система Ресслера, то в проведенных исследованиях изначально была поставлена более сложная задача – определить старший показатель Ляпунова хаотического режима колебаний системы, демонстрирующей генерацию берстов – «пачек» импульсов и характеризующейся двумя сильно отличающимися масштабами (быстро-медленной динамикой). Дополнительная сложность состояла в наличии шума в последовательности межберстовых интервалов.

По результатам проведенных исследований был сделан вывод о том, что модифицированный метод расчета старшего показателя Ляпунова, предусматривающий построение зависимости величины показателя от максимально допустимой ошибки ориентации векторов в реконструированном фазовом пространстве, позволяет диагностировать наличие маломерной хаотической динамики (по наличию максимума зависимости $\lambda_1(\alpha)$), а также охарактеризовать уровень шума в точечном процессе. Полученные результаты расширяют выводы ранее проводившихся исследований на широкий класс нейронных осцилляторов. Они свидетельствуют о том, что закономерности поведения зависимости $\lambda_1(\alpha)$ являются общими не только для систем с фазо-когерентным хаосом, но и для сильно-нелинейных колебательных режимов, наблюдаемых в динамике нейронных моделей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Sauer, T. Reconstruction of integrate-and-fire dynamics / T. Sauer // Nonlinear dynamics and time series ; ed. by Culter C., Kaplan D. − 1997. − Vol. 11. − P. 63−75.

[2] Racicot, D. M. Interspike interval attractors from chaotically driven neuron models / D. M. Racicot, A. Longtin // Physica D. − 1997. − Vol. 104. − P. 184−204.

[3] Sauer, T. Reconstruction of dynamical system from interspike intervals / T. Sauer // Phys. Rev. Lett. − 1994. − Vol. 72. − P. 3911−3914.

[4] Janson, N. B. Reconstruction of dynamical and geometrical properties of chaotic attractors from threshold-crossing interspike intervals / N. B. Janson, A. N. Pavlov, A. B. Neiman, V. S. Anishchenko // Phys. Rev. E. − 1998. − Vol. 58. − P. R4−R7.

[5] Gabbiani, F. Coding of time-varying signals in spike trains of integrate-and-fire neurons with random threshold / F. Gabbiani, C. Koch // Neural Comput. − 1996. − Vol. 8. − P. 44−66.

[6] Norsworthy, S. R. Delta-sigma data converters - theory, design and simulation / S. R. Norsworthy, R. Schreier, G. C. Temes. − New York: IEEE Press, 1997.

[7] Takens, F. Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // Dynamical systems and turbulence ; ed. by Rang D., Young L. S. − 1980. − Vol. 898. − P. 366−381.

[8] Benettin, G. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them / G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. M. Strelcyn // Meccanica. − 1980. − Vol. 15. − P. 9−20.

[9] Павлов, А. Н. Методы анализа сложных сигналов / А. Н. Павлов. – Саратов: Научная книга, 2008. – 120 с.

[10] Wolf, A. Determining Lyapunov exponents from a time series / A.Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano // Physica D. – 1985. – Vol. 16. – P. 285-317.