# ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

# Исследование мультистабильности и формирования пространственных структур в ансамблях с дальнодействующими связями

## АВТОЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 03.03.03 «Радиофизика»
физического факультета
Муренцова Сергея Михайловича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор

А.В. Шабунин

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

В.С. Анищенко

### Введение

**Целью данной выпускной квалификационной работы** - является проведение научных исследований мультистабильности в ансамбле автоколебательных систем, в которых наряду с локальными действуют дальнодействующие связи.

### Для достижения данной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- 1. Методом медленно меняющихся амплитуд получить укороченные уравнения для амплитуд и фаз.
- 2. Разработать компьютерную программу для численного интегрирования полученных уравнений.
- 3. Исследовать устойчивость режимов бегущих волн с разным пространственным периодом в зависимости от величины и дальнодействия связей.
- 4. Проанализировать полученные результаты, выявить общие закономерности.

Колебательные и волновые процессы, наблюдаемые в системах, состоящих из большого числа взаимодействующих осцилляторов, являются предметом пристального внимания специалистов в различных областях математики, физики, химии, биологии и других наук, так как они демонстрируют множество интересных и важных для практического применения явлений, формирование таких как синхронизация, самоорганизация И При пространственнопространственных структур. моделировании временной динамики таких сред обычно используют либо модели, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных, либо ансамбли связанных осцилляторов, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

### ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Краткие теоретические сведения.** Одной из базовых моделей генераторов периодических колебаний служит осциллятор Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0 \tag{1}$$

где x — динамическая переменная,  $\varepsilon$  — параметр возбуждения генератора, точка обозначает производную по времени. Осциллятор Ван-дер-Поля представляет собой классическую автоколебательную систему и его динамика хорошо известна. При отрицательных значениях параметра  $\varepsilon$  в фазовом пространстве  $(x, \dot{x})$  существует единственный аттрактор — устойчивое состояние равновесия в начале координат:

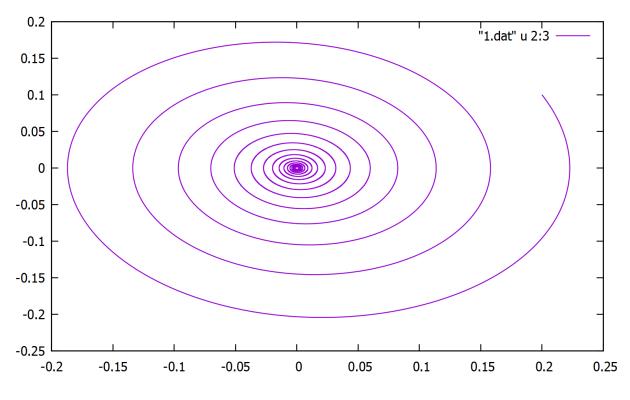


Рисунок 1.Фазовый портрет при ε <0

Увеличение  $\varepsilon$  (рис. 2) приводит к бифуркации Андронова-Хопфа (при  $\varepsilon = 0$ ), в результате которой состояние равновесия теряет устойчивость и, в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл.

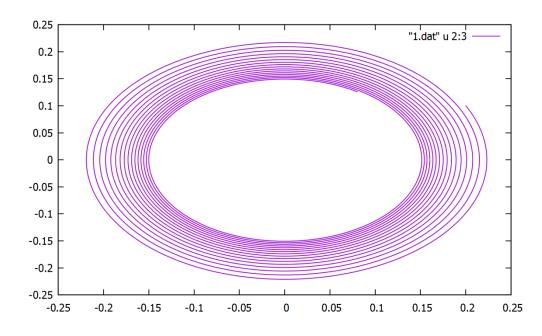


Рисунок 2: Устойчивый предельный цикл

При значении параметра  $\varepsilon$  близком к бифуркационному (рис. 3) (0 <  $\varepsilon$  « 1), предельный цикл соответствует квазигармоническим колебаниям с малой амплитудой. При дальнейшем увеличении  $\varepsilon$  амплитуда колебаний увеличивается, а их форма искажается , что соответствует появлению в спектре гармонических составляющих на кратных частотах. При больших  $\varepsilon$  колебания становятся релаксационными

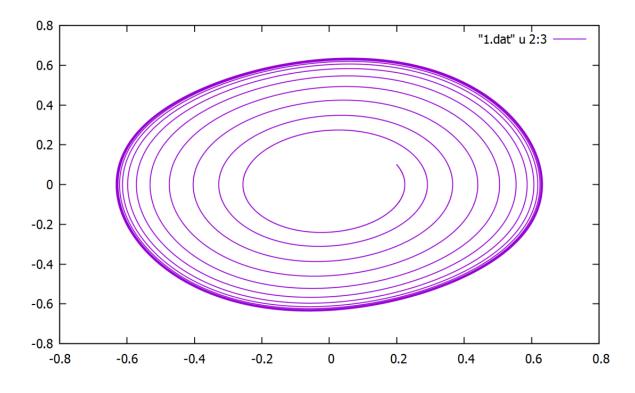


Рисунок 3: Фазовый портрет

### Результаты проведенных исследований.

Области существования и устойчивости гармонических бегущих волн для ансамбля генераторов с локальными связями.

Рассмотрим цепочку осцилляторов Ван-дер-Поля с симметричной диссипативной связью, замкнутую в кольцо:

$$\ddot{x}_i - (\varepsilon - x_i^2)\dot{x}_i + x_i - \gamma(\dot{x}_{i+1} - 2\dot{x}_i + \dot{x}_{i-1}) = 0, \quad (1)$$

Положим, что колебания в каждом генераторе близки к гармоническим и определим для этого случая приблизительный вид решения. Будем использовать метод медленно меняющихся амплитуд:

$$x_i = a_i e^{jt} + a_i^* e^{-jt}$$

Посредством стандартных для этого метода преобразований, получили уравнения для комплексных амплитуд  $a_i$ :

$$\dot{a}_i - \frac{a_i}{2} (\varepsilon - 3|a_i|^2 = \frac{\gamma}{2} (a_{i+1} + a_{i-1} - 2a_i)$$

Для определений устойчивости решений перейдем к уравнениям для вещественных амплитуд и фаз, преобразовав комплексные амплитуды к полярной форме:

$$a_i = \rho_i e^{j\varphi_i}, \quad \dot{a}_i = \dot{\rho}_i e^{j\varphi_i} + j\rho_i e^{j\varphi_i}$$

Приведя вещественную и мнимую части

получим систему уравнений для  $\rho_i$  и  $\phi_i$ :

$$\hat{\rho}_{i} = \frac{\rho_{i}}{2} (\varepsilon - 3\rho_{i}^{2}) + \frac{\gamma}{2} (\rho_{i+1} \cos(\varphi_{i+1} - \varphi_{i}) + \rho_{i-1} \cos(\varphi_{i-1} - \varphi_{i}) - 2\rho_{i})$$

$$\dot{\varphi}_{i} = \frac{\gamma}{2} (\frac{\rho_{i+1}}{\rho_{i}} \sin(\varphi_{i+1} - \varphi_{i}) + \frac{\rho_{i-1}}{\rho_{i}} \sin(\varphi_{i-1} - \varphi_{i}))$$
(2)

Анализ системы уравнений (2) дает следующие условия для областей устойчивости бегущих волн в цепочке осцилляторов:

$$\varepsilon > \gamma [2 - 4\cos(\Delta \varphi_k) + \frac{1 + \cos(\frac{2\pi}{N})}{\cos(\Delta \varphi_k)}, \quad \cos(\Delta \varphi_k) > 0.$$
 (3)

На рисунке (4) представлены границы областей существования волновых режимов, исходя из условия (3). Линии  $s_1 - s_7$  - соответствуют областям существования волновых режимов с волновым числом k.

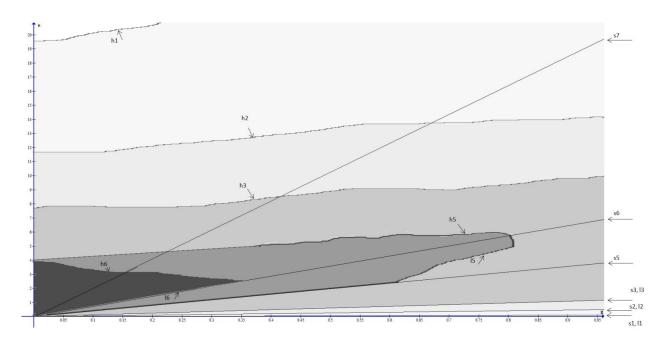


Рисунок 4. Экспериментальные границы областей устойчивости для режимов бегущих волн. Линиями s1- s7 изображены соответствующие границы областей устойчивости для гармонических осцилляторов.

Экспериментальными границами устойчивости обозначены оттенки серого цвета: более коротковолновым режимам соответствует более темный цвет. Таким образом, устойчивости диаграмма режимов ДЛЯ цепочки Ван-дер-Поля (1),автогенераторов представленная на рисунке представляет из себя вложенные друг в друга ограниченные структуры областей. Нижние границы областей устойчивости выходят из начала координат и при малой связи представляют собой прямые линии, верхние границы так же при малой связи очень похожи на прямые линии, выходящие каждая из своей точки с абсцисс = 0.

Теперь перейдем от локальных связей к дальнодействующим.

Объединение генераторов в ансамбль с линейными нелокальными (дальнодействующими) связями приводит к системе уравнений:

$$\ddot{x}_i - \left(\varepsilon - x_i^2\right)\dot{x}_i + x_i = \frac{\gamma}{L}\sum_{l=-L}^L (\dot{x}_{i+l} - \dot{x}_i) \tag{4}$$

Положим, что колебания в каждом генераторе близки к гармоническим и определим для этого случая (4) приблизительный вид решения. Будем так же использовать метод медленно меняющихся амплитуд:

$$x = \frac{1}{2}(a_i e^{jt} + a_i^* e^{-jt})$$

Посредством стандартных для этого метода преобразований получим уравнения для комплексных амплитуд  $a_i$ :

$$\dot{a}_i = \frac{a_i}{2} (\varepsilon - \frac{|a|^2}{4}) + \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^{L} (a_{i+l} - a_i)$$

Приведя вещественную и мнимую части получим конечное решение для амплитуды и фазы:

$$\int \dot{\rho}_{i} = \frac{\varepsilon}{2} \rho_{i} - \frac{\rho_{i}^{3}}{8} + \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^{L} (\rho_{i+l} cos(\varphi_{i+l} - \varphi_{i}) - \rho_{i})$$

$$\dot{\varphi}_{i} = \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^{L} \frac{\rho_{i+l}}{\rho_{i}} \sin(\varphi_{i+l} - \varphi_{i})$$
(5)

Анализ системы уравнений (5) дает следующие условия для областей устойчивости бегущих волн в цепочке осцилляторов:

$$-\left(\varepsilon^{(k)} + 2\gamma C_n(N, L)\right) + \sqrt{(\varepsilon^{(k)})^2 + 4\gamma^2 S_n^2(N, L)} < 0. \tag{6}$$

Полученные условия устойчивости определяются фазовым сдвигом между осцилляторами в ансамбле и не зависят ни от параметра связи, ни от параметра возбуждения, ни от амплитуды колебаний.

Для того, чтобы получить области устойчивости на плоскости параметров  $\varepsilon - \gamma$  необходимо вернуться к полному условию (6):

$$\varepsilon^{(k)} > \gamma \left[ \frac{S_n^2(N, L) - C_n^2(N, L)}{C_n(N, L)} \right]$$

которое можно переписать в виде неравенства:

$$\varepsilon^{(k)} > \gamma \Theta^{(k)}(N, L)$$
 (7)

где  $\Theta^{(k)}(N,L) = \max\left\{\frac{S_n^2(N,L) - C_n^2(N,L)}{C_n(N,L)}\right\}_{n=1}^{N-1}$ , задающее условие устойчивости k-волны.

Для выбранных K, L неравенство (7) задает на плоскости  $\varepsilon - \gamma$  области устойчивости волновых режимов (рис. 5-7):

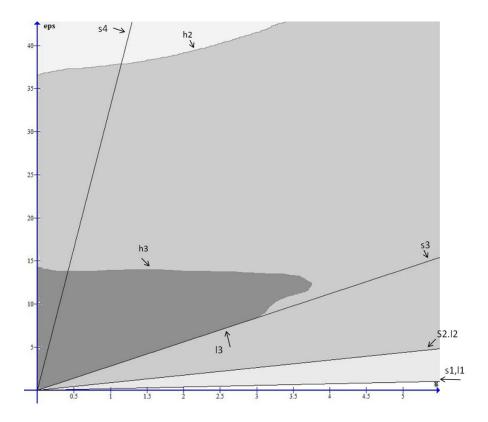


Рисунок 5. Экспериментальные границы областей устойчивости для режимов бегущих волн при L=2.

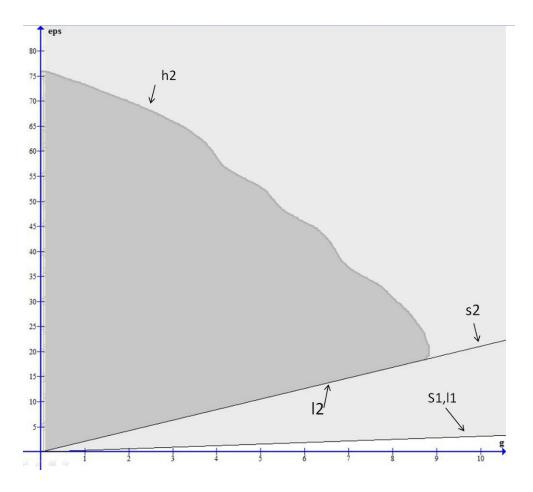


Рисунок 6. Экспериментальные границы областей устойчивости для режимов бегущих волн при L=3.

На рисунке (5) все так же заметно, что в отличии от гармонических осцилляторов, в системе полных уравнений каждый волновой режим имеет конечную область устойчивости, за исключением пространственнооднородного. При малой связи нижние границы областей устойчивости  $l_1-l_3$  практически совпадают с соответствующими им границами  $s_1-s_3$ . Можно проанализировать границы областей устойчивости для бегущей волны с длинной  $\Lambda=10$  (k=3). Нижняя граница, как и в случае с локальными связями, совпадает с линией  $s_3$  до значений коэффициента связи  $\gamma \sim 3$ . Области устойчивости более длинноволновых режимов ведут себя аналогичным образом, но, в отличии от локальных связей между

генераторами, их верхняя граница простирается заметно выше, нежели при тех же параметров k для локальных связей.

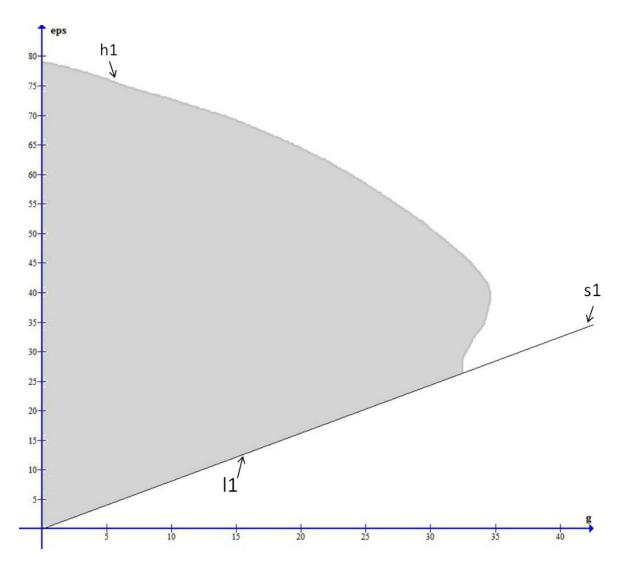


Рисунок 7. Экспериментальные границы областей устойчивости для режимов бегущих волн при L=5.

Видно, что при увеличении параметра дальнодействия, областей устойчивости для разных длин волн, становится меньше, он их реальная область устойчивых колебаний возрастает, например, для локальных связей (L=1), верхняя граница самого длинноволнового режима (K=1) доходила до значений параметра  $\varepsilon \sim 20$ , при дальнодействии (L=5) эта же граница выросла на порядок до  $\varepsilon \sim 80$ , аналогично происходит и с коэффициентом связи.

### Заключение

В ходе экспериментальной работы была продемонстрирована классическая работа одиночного осциллятора Ван-дер-Поля. Так же была проделана работа для цепочки тридцати осцилляторов с локальными связями, а именно: методом медленно меняющихся амплитуд были найдены приближенные методы решения для нахождения областей устойчивости, так же для исходной системы уравнений была разработана программа для численного интегрирования данных уравнений, в следствие чего была найдена реальная область существования колебаний с различными длинами волн.

Чтобы узнать как поведут себя области устойчивости в ансамбле генераторов с дальнодействующими связями, необходимо произвести аналогичные исследования. Как в случае и с локальными и с дальнодействующими связями, нижняя граница области устойчивости совпадает с найденной аналитически границей устойчивости при условии коротковолновых режимов колебаний, небольшие отклонения возникают при длинноволновых режимах.

Была установлена зависимость: чем короче длина волны, тем ближе к линии γ= 0 располагается область устойчивости соответствующего колебательного режима. При увеличении дальнодействия верхние и нижние границы для соответствующих режимов находятся значительно дальше от начала от соответствующих осей.