Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

Диагностика гиперхаотических колебаний по последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 03.03.03 «Радиофизика»
физического факультета
Сульчакова Артема Владимировича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ____________________ А.Н. Павлов

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ____________________ В.С. Анищенко

Саратов 2017 год

ВВЕДЕНИЕ

Различия между режимами динамического хаоса и гиперхаоса можно надежно выявить в том случае, когда задана математическая модель исследуемой системы. Например, для моделей в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений есть стандартный метод расчета спектра показателей Ляпунова [1], применение которого позволяет понять, с каким режимом динамики мы имеем дело. Знание модели дает возможность осуществить бифуркационный анализ и найти значения управляющих параметров, соответствующих границе между регулярными колебаниями и хаотическими, а также между хаотическими колебаниями и гиперхаотическими. Чем больше положительных показателей Ляпунова, тем больше присутствует направлений, по которым траектории разбегаются друг от друга, то есть сильнее выражена неустойчивость фазовых траекторий. Это можно интерпретировать как более высокую сложность динамики.

В отсутствие уравнений математической модели охарактеризовать возрастающую сложность динамического режима при переходе от хаоса к гиперхаосу можно, если привлечь методы расчета показателей Ляпунова по временным рядам. Таких методов известно много, но самый надежный и точный из них, по мнению многих исследователей – это метод, изложенный в статье Вольфа [2].

Формально, можно привлекать и подходы, которые не предполагают расчета показателей Ляпунова, но, тем не менее, позволяют выявить различия между хаосом и гиперхаосом. Например, недавно был предложен метод диагностики переходов «хаос–гиперхаос», предусматривающий анализ возвратных отображений (“reccurence plots”) [3, 4]. Тем не менее, в вопросе диагностики гиперхаоса по временным рядам существуют сложности, если речь идет о проведении диагностики по относительно короткой выборке.

Еще сложнее задача диагностики в случае, когда доступная для исследования информация представляет собой не полную временную зависимость фазовых переменных, а точечный процесс – последовательность интервалов времени между какими-то характерными (повторяющимися) событиями.

В теории динамических систем примером точечного процесса служит последовательность времен возврата фазовой траекторией в секущую Пуанкаре [5]. В ряде работ задача диагностики режимов гиперхаоса по последовательности времен возврата решалась для взаимодействующих автоколебательных систем. В одной из первых публикаций [6] был сделан вывод о возможности такой диагностики по двум последовательностям времен возврата. Позднее было показано, что достаточно и одной последовательности, если секущая Пуанкаре выбрана таким образом, что она учитывает сопоставимый вклад динамики каждой из взаимодействующих систем в полученную последовательность точек в сечении [7].

Поскольку общий вывод о возможности диагностики гиперхаоса по временам возврата ранее был сделан, возникает следующий вопрос – а какой будет точность расчета показателей Ляпунова и, соответственно, надежность диагностики перехода «хаос–гиперхаос», если рассматривается короткая последовательность времен возврата в секущую Пуанкаре.

Целью данной выпускной квалификационной работы является исследование границ применимости метода диагностики гиперхаотических режимов колебаний по последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре.

Материалы исследования. Исследования проводились на основе реконструкции динамических систем [8–10] по последовательностям времен возврата методом аппроксимации мгновенной частоты колебаний. Расчеты характеристик сложной динамики осуществлялись на основе метода определения показателей Ляпунова по временным рядам [2].

Выпускная квалификационная работа содержит введение, две главы (1 – Краткие теоретические сведения; 2 – Результаты проведенных исследований), заключение и список использованных источников. Общий объем работы 42 стр.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Краткие теоретические сведения. Основная идея метода вычисления показателей Ляпунова по последовательности времен возврата состоит в следующем. Пусть задана колебательная система, демонстрирующая режим динамического хаоса, и в качестве динамической переменной этой модели выбрана временная зависимость переменной состояния $x(t)$. Будем считать, что доступной является не вся эта зависимость, а только моменты времени, когда сигнал $x(t)$ пересекает секущую Пуанкаре, имеющую вид $x(t)=\Theta$. Такая постановка задачи допускает и альтернативную формулировку – можно рассматривать пороговое устройство, которое срабатывает при превышении сигналом на входе порогового значения Θ.

Если обозначить через T_i моменты времени, когда происходит пересечения выбранной секущей плоскости в одном направлении, а через I_i – времена возврата, $I_i = T_{i+1} - T_i$, то это позволяет найти значения усредненной мгновенной частоты колебаний за одно время возврата

$$\omega(T_i) = \frac{2\pi}{I_i}, \tag{5}$$

Формально, величины $\omega(T_i)$ представляют собой результат усреднения мгновенной частоты по Гильберту за интервал времени между последовательными пересечениями порогового уровня [6]. Учитывая, что значения $\omega(T_i)$ определяются не в любой момент времени, а только в дискретные отсчеты T_i, анализ динамики усредненной мгновенной частоты проводить неудобно, если не осуществить переход к равномерной временной шкале. Традиционно при анализе сигналов с неравномерной выборкой по времени проводится их преобразование, состоящее в интерполяции с постоянным шагом. Интерполяция может проводиться разными способами, преимущественно стараются применять гладкие функции, например, кубические сплайны. Учитывая то обстоятельство, что значения мгновенной частоты усредняются в пределах меняющегося во времени окна, такой подход не позволяет точно получить временную зависимость мгновенной частоты колебаний. Тем не менее, даже приближенное восстановление усредненной мгновенной частоты позволяет реконструировать аттрактор, который сохраняет основные свойства аттрактора исходной динамической системы. Расчеты размерностей и показателей Ляпунова, предпринятые в многочисленных публикациях, позволяют это подтвердить.

Рассмотрим основные результаты ранее проводившихся исследований. В работах [6, 7] основная часть результатов была получена на примере моделиРесслера, которая часто применяется в тестированиях различных методов анализа хаотических режимов колебаний.

Также была рассмотрена более сложная задача – анализ динамики взаимодействующих автоколебательных систем, когда наличие связи между хаотическими осцилляторами приводит к режимам гиперхаотических колебаний, которые характеризуются двумя положительными показателями Ляпунова. Чтобы охарактеризовать гиперхаотическую динамику по последовательности времен возврата в секущую Пуакаре, рассмотрим следующую модель двух связанных систем Ресслера:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -w_1 y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1),\\
\frac{dy_1}{dt} &= w_1 x_1 + a y_1,\\
\frac{dz_1}{dt} &= b + z_1(x_1 - c),\\
\frac{dx_2}{dt} &= -w_2 y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2),\\
\frac{dy_2}{dt} &= w_2 x_2 + a y_2,\\
\frac{dz_2}{dt} &= b + z_2(x_2 - c).
\end{aligned} \tag{7}$$

В приведенных уравнениях выбором параметров a, b и c определяется режим динамики каждой подсистемы, а с помощью параметра γ выбирается коэффициент связи. Базовые частоты $w_1 = w_0 + \Delta$ и $w_2 = w_0 - \Delta$ имеют малую расстройку Δ, определяющую индивидуальные различия динамики подсистем.

В проводимых исследованиях был выбран следующий набор параметров: a =0.15, b =0.2, γ =0.02, w_0 =1.0, Δ=0.0093. Параметр c менялся в диапазоне [6.8, 8.0], которая включает и область хаотической, и область гиперхаотической динамики.

В работе [6] отмечалось, что если выбрать секущую плоскость в виде $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$, то по последовательности времен возврата в эту плоскость нельзя вычислить оба положительных показателя Ляпунова в режиме гиперхаоса. Для того, чтобы оба показателя правильно посчитать, нужно взять две секущих плоскости и проводить реконструкцию динамических систем по двум последовательностям времен возврата (анализируя времена возврата в каждую плоскость по отдельности).

Однако возникает вопрос – а действительно ли знание двух последовательностей времен возврата необходимо для расчета двух показателей Ляпунова, или же можно использовать одну последовательность времен возврата, подходящим образом задав секущую плоскость? В целях анализа гиперхаотической динамики по одной последовательности времен возврата зададим секущую Пуанкаре таким образом, чтобы она динамику обеих подсистем. Например, если интерпретировать последовательность времен возврата как времена между превышением порогового значения сигналом $x_1(t)$ + $y_2(t)$, то это означает одинаковые значения амплитуды сигналов первой и второй подсистемы, которые суммируются на входе порогового устройства.

Используя идеологию прохождения через пороговое устройство суммы сигналов от каждой подсистемы, можно рассмотреть входной сигнал вида $k_1 x_1(t) + k_2 y_2(t)$, а во избежание пропусков траектории, выбрать в качестве порогового значения Θ =0. Если постоянные коэффициенты k_1 и k_2 примерно соответствуют друг другу, то это означает, что амплитуды сигналов каждой подсистемы приближенно равны, то есть каждая подсистема вносит равный вклад в генерацию последовательности времен пересечения порогового уровня, то есть в последовательность времен возврата. Если же коэффициенты сильно отличаются, например, $k_1 \sim 1$, а $k_2 \sim 0$, то первая система оказывает доминирующий вклад, и изучать по последовательности времен возврата общую динамику связанных систем Ресслера становится сложнее. Более того, такое изучение может не позволить правильно охарактеризовать режим динамики. Проведенные исследования показали, что по одной последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре правильно определяются оба показателя Ляпунова при равных значениях k_1 и k_2, причем, как для режима хаоса, так и для режима гиперхаоса. В том случае, когда второй показатель приближается к первому, происходит рост ошибок, связанных с ориентацией векторов возмущений в фазовом пространстве при проведении перенормировок. Эти ошибки обычно накапливаются для второго ляпуновского показателя.

Результаты проведенных исследований. В ранее проводившихся исследованиях расчеты показателей Ляпунова по последовательностям времен возврата в секущую Пуанкаре модели двух связанных осцилляторов Рёсслера проводились для секущей плоскости, заданной уравнением $x_2 + y_1 = 0$. Такой выбор секущей плоскости означает примерно одинаковый вклад обеих подсистем модели. Если же плоскость выбрана таким образом, что вклад одной из подсистем доминирует, то это скажется на точности проводимых оценок.

Чтобы количественно охарактеризовать динамику связанных систем Ресслера при разном соотношении k_1 и k_2, предлагается рассмотреть секущую поверхность в виде $k_1 y_2(t) + k_2 x_1(t)$ или $k_1 y_1(t) + k_2 x_2(t)$, задав коэффициенты в виде $k_1 = \sin\beta$, $k_2 = \cos\beta$. Ключевой момент при проведении расчетов связан с отсутствием артефактов – очень больших временных интервалов, возникающих из-за того, что при сложении сигналов с разными фазами может произойти пропуск каких-то осцилляций. Другой случай – когда из-за сложения колебаний каждой подсистемы могут произойти два пересечения порогового уровня подряд (на интервале времени, составляющем лишь часть одного периода колебаний). Это приводит к тому, что в последовательности времен возврата появляются очень малые значения. Из-за возникновения подобных ситуаций распределение времен возврата приобретает большую ширину, и это приведет к неоднородной структуре восстановленного аттрактора – будут появляться осцилляции сильно отличающейся амплитуды, и на фазовом портрете возникнут области, которые будут посещаться значительно чаще других. Наличие нескольких сильно отличающихся масштабов означает, что сложнее определить границы линейного приближения, и если для одних масштабов будет выполняться условие линейного приближения, то для других масштабов это условие или не выполняется, или перенормировки происходят слишком часто. И в том, и в другом случае происходит недооценка старшего показателя Ляпунова. О данной проблеме немного подробнее будет сказано далее, пока же рассмотрим случай, когда выбирается тот вариант секущей плоскости, для которого артефакты отсутствуют.

Как показали расчеты, для правильных оценок старшего показателя Ляпунова можно выбрать довольно широкий диапазон изменения β. Только в том случае, когда выбираются величины β в окрестности 0 или π, возникают большие ошибки вычислений. Этот выбор соответствует заданию секущей плоскости в виде $x_2 = 0$. В остальных случаях заметных ошибок не наблюдается, и величина старшего показателя Ляпунова оценивается с хорошей точностью. В данном случае расчеты проводились по последовательностям времен возврата, содержащим 2000 отсчетов. Для снижения погрешности можно увеличить объем выборки, рассмотрев, например, последовательности, содержащие порядка 10000 отсчетов. В этом случае погрешность, как правило, не превышает 10%.

При расчете второго показателя Ляпунова зависимость оцениваемой величины от значения β является более сложной. В этом случае значительные ошибки вычисления второго положительного показателя, то есть диагностики гиперхаотического режима колебаний возникают не только при выборе β в окрестности 0 или π, но и для значений в окрестности $\pi/2$. Фактически, это означает, что рассмотрение только одной подсистемы (выбор секущей плоскости в виде $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$) не позволяет решить задачу диагностики анализируемого режима колебаний. Таким образом, решение задачи диагностики гиперхаотических режимов колебаний существенным образом зависит от выбора секущей Пуанкаре. В случае ее неудачного задания даже рассмотрение очень большого объема данных не позволит правильно распознать режим динамики.

Решаемая задача усложняется, если в последовательности времен возврата появляются артефакты, приводящие либо к очень малым интервалам времени (существенно меньше одного характерного периода колебаний), либо к появлению пропусков переходов сигнала через пороговый уровень и наличию интервалов времени, в 2 и более раза превышающих характерный период колебаний.

Как уже отмечалось, при восстановлении временных зависимостей усредненных мгновенных частот и реконструкции аттрактора методом задержек возникают неоднородности фазового портрета – участки с сильно отличающимся размахом колебаний. Наличие нескольких временных масштабов сопровождается сложностями указания границ линейного приближения – для одних участков фазовой траектории условие линейности (то есть экспоненциального разбегания траекторий) будет выполняться, а для других участков – нет. Поэтому на одних участках показатель Ляпунова локально будет оцениваться правильно, а на других – вычисленное значение будет меньше ожидаемого (хотя может оказаться и больше, если присутствует измерительный шум).

Чтобы избежать ложной идентификации динамических режимов, необходимо проводить обязательную проверку последовательности времен возврата на наличие артефактов, которая включает следующие пункты. Если возникают пропуски части осцилляций, выходная последовательность времен возврата содержит временные интервалы, близкие к значениям $2T_b$, $3T_b$, ..., где T_b – характерный период колебаний, то есть период, соответствующий базовой частоте в спектре мощности (в режиме фазо-когерентной динамики). В этом случае выборки усредненной мгновенной частоты $\omega(T_i)$ должны определяться по формуле $\omega(T_i) = 2\pi m / I_i$, где m выбирается из условия медленных изменений $\omega(t)$. Это позволяет избежать некорректных выборок $\omega(T_i)$, вызванных неправильным заданием секущей плоскости.

При наличии малых значений времен возврата (существенно меньше характерного периода колебаний) также возникают некорректные выборки $\omega(T_i)$. Без устранения данных артефактов возникают существенные проблемы вычисления показателей Ляпунова, вызванные неоднородностью аттрактора, реконструированного по временам возврата. В результате вычисляемые значения могут существенно отличаться от ожидаемых значений. Особенно это качается второго показателя Ляпунова, так как при наличии артефактов могут возникать ошибки в диагностике режимов хаоса и гиперхаоса.

Более детальные исследования показывают, что применяемый метод позволяет использовать сравнительно небольшой объем выборки для диагностики режима (если не возникает проблема появления артефактов). Использование большого объема данных уменьшает ошибки вычисления и возможные отклонения значений показателей Ляпунова от величин, вычисленных по уравнениям математической модели. Но чтобы просто распознать, с каким режимом динамики мы имеем дело – с хаосом или гиперхаосом, можно использовать последовательности времен возврата, содержащие всего несколько сотен отсчетов.

Формально, даже по выборке, составляющей порядка 100 отсчетов, можно проводить оценку показателей. Однако для повышения точности (проведения вычислений с ошибкой менее 10% для первого показателя и с ошибкой менее 30% для второго показателя) целесообразно рассматривать выборку порядка 1500 отсчетов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе решалась задача диагностики режимов гиперхаотических колебаний по последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре. С этой целью была рассмотрена модель двух связанных систем Рёсслера, которая ранее использовалась в аналогичных исследованиях, поэтому полученные результаты можно было сравнивать с ранее полученными данными. Прежде всего, было отмечено, что при подходящем выборе секущей Пуанкаре задача диагностики режима гиперхаоса может быть решена достаточно надежно, даже если доступна сравнительно небольшая выборка – несколько сотен времен возврата. Если секущая поверхность выбрана таким образом, что она преимущественно учитывает динамику только одной подсистемы, то это может привести к ошибочной диагностике режима динамики, и гиперхаотический режим будет распознан как хаотический.

В работе были проведены оценки относительной погрешности вычисления двух показателей Ляпунова режима гиперхаотических колебаний. Полученные результаты позволяют установить, что ошибка расчета второго показателя Ляпунова в 2-3 раза больше, чем ошибка расчета первого показателя. Это связано с возрастающими ошибками ориентации векторов возмущения в реконструированном фазовом пространстве. Для повышения точности вычислений (достижения ошибки менее 10% для первого показателя и менее 30% - для второго показателя) необходимо анализировать выборку порядка 1500 отсчетов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Benettin, G. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them / G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. M. Strelcyn // Meccanica. – 1980. – Vol. 15. – P. 9–20.

[2] Wolf, A. Determining Lyapunov exponents from a time series / A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano // Physica D. – 1985. – Vol. 16. – P. 285–317.

[3] Souza, E. G. Using recurrences to characterize the hyperchaos-chaos transition / E. G. Souza, R. L. Viana, S. R. Lopes // Phys. Rev. E. – 2008. – Vol. 78. – P. 066206.

[4] Ngamga, E. J. Recurrence-based detection of the hyperchaos-chaos transition in an electronic circuit / E. J. Ngamga, A. Buscarino, M. Frasca, G. Sciuto, J. Kurths, L. Fortuna // Chaos. – 2010. – Vol. 20. – P. 043115.

[5] Анищенко, В. С. Теория возвратов Пуанкаре и её приложение к задачам нелинейной физики / В. С. Анищенко, С. В. Астахов // Успехи физических наук. – 2013. – Т. 183. – С. 1009–1028.

[6] Pavlov, A. N. Chaotic dynamics from interspike intervals / A. N. Pavlov, O. V. Sosnovtseva, E. Mosekilde, V. S. Anishchenko // Phys. Rev. E. – 2001. – Vol. 63, No. 3. – P. 036205.

[7] Pavlov, A. N. Characterization of the chaos-hyperchaos transition based on return times / A. N. Pavlov, O. N. Pavlova, Y. K. Mohammad, J. Kurths // Phys. Rev. E. – 2015. – Vol. 91. – P. 022921.

[8] Takens F. Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // Dynamical systems and turbulence ; ed. by Rang D., Young L. S. – 1980. –Vol. 898. – P. 366–381.

[9] Packard, N. H. Geometry from a time series / N. H. Packard, J. R. Crutchfield, J. D. Farmer, R. S. Shaw // Phys. Rev. Lett. – 1980. –Vol. 45. –P. 712–716.

[10] Sauer, T. Embedology / T. Sauer, J. A. Yorke, M. Casdagli // J. Statistical Physics. – 1991. –Vol. 65. – P. 579–616.