

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Колебания автогенераторов, взаимодействующих через  
мемристор**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4-го курса 421 группы

Направления 03.03.03. - Радиофизика

Физического факультета

Шабалиной Ольги Геннадьевны

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ Вадивасова Т.Е.

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ Анищенко В.С.

Саратов 2017

# 1 Характеристика работы

В работе исследуется взаимодействие генераторов Ван дер Поля, связанных через сопротивление с памятью, известное в научной литературе, как мемристор. Получена безразмерная математическая модель системы и проведены численные исследования поведения системы в случае полной идентичности парциальных генераторов и при наличии частотной расстройки.

Цель выпускной квалификационной работы состоит в ответе на вопрос: возможна ли синхронизация автоколебаний в случае связи через мемристор и к каким особенностям поведения взаимодействующих систем может привести такая связь.

## 2 Содержание работы

**Во введении** дается общее представление о мемристорах, приводится обзор научной литературы, посвященной мемристорам и мемристоривным системам, обосновывается актуальность работы, формулируется цель работы.

Последние годы большой интерес исследователей вызвал новый радиотехнический элемент – мемристор. Он представляет собой пассивный двухполюсник, обладающий памятью. Если предположить, что магнитный поток  $\phi$  в двухполюснике нелинейно связан с переносимым зарядом  $q$  и воспользоваться соотношениями  $d\phi = udt$ ,

$dq = idt$ , то можно получить вольт-амперную характеристику двухполюсника в виде  $u = R_M(q)i$ , где  $R_M(q) = \frac{d\phi}{dq} = \phi'$ . Сопротивление (мемристанс)  $R_M(q)$  управляется зарядом и связано со значениями тока, протекавшего через двухполюсник в предыдущие моменты времени

$$R_M(q) = \phi' \left( \int_{-\infty}^t i(t) dt \right) \quad (1)$$

Аналогично можно записать:  $i = G_M(\phi)u$ , где  $G_M(\phi) = \frac{dq}{d\phi} = q'\phi'$ . Проводимость  $G_M(\phi)$  управляется магнитным потоком и зависит от предшествующих значений напряжения:

$$G_M(\phi) = q' \left( \int_{-\infty}^t u(t) dt \right). \quad (2)$$

Теоретически концепция мемристора была разработана Л. Чуа еще в 1971 г. В 2008 г. появилось реальное полупроводниковое устройство, обладающее свойствами мемристора. На сегодняшний день имеется уже много публикаций, посвященных экспериментальным исследованиям и численному моделированию свойств полупроводниковых мемристоров, полимерных мемристоров и мемристоров иной природы. Планируется использование мемристоров в электронике и компьютерной технике, в частности для создания элементов памяти. Однако исследование поведения различных радиотехнических цепей и систем, содержащих элементы такого рода, пока еще только начинается. Не всегда ясно, к какому типу динамики, и каким новым

эффектам может привести замена обычного резистора с постоянным сопротивлением на мемристор.

Особенностью математических моделей систем, включающих мемристор в качестве элемента, является возможность существования так называемых линий равновесий, т.е. некоторых линий в фазовом пространстве системы, все точки которых являются точками равновесия. Динамика таких систем носит особый характер. При определенном выборе параметров в зависимости от начальных условий, можно наблюдать как множество устойчивых точек равновесия, так и множество неизолированных замкнутых кривых различного размера. Всё множество этих траекторий образует аттрактор системы, который состоит из некоторой двумерной поверхности и устойчивых участков линии равновесий. Траектории на аттракторах подобного типа не обладают свойством эргодичности и, в некотором смысле, можно говорить о скрытом аттракторе. Действительно, при заданных начальных условиях мы можем наблюдать только одну траекторию, не несущую информации обо всем аттракторе, так что аттрактор в целом остается скрытым.

Перспективы использования мемристоров в качестве элементов памяти предполагает создание сложных многокомпонентных систем, содержащих мемристивные элементы. С другой стороны, ансамбли мемристивных элементов вызывают большой интерес в области нейродинамики, поскольку могут служить моделями нейронных систем.

Таким образом, характер взаимодействия нелинейных систем, содержащих мемристоры является актуальной задачей для исследований в области нелинейной динамики. В рамках данной проблемы можно выделить исследование особенностей взаимодействия автоколебательных систем через мемристивный элемент. При этом, предполагается, что сами взаимодействующие системы не содержат мемристоров. Данная задача на сегодняшний день еще мало изучена. Имеется лишь несколько работ, посвященных синхронизации автогенераторов с мемристивной связью, из которых следует, что синхронизация возможна, но нет четких данных об особенностях эффектов синхронизации в таких системах.

**В разделе 1** приводится **вывод математической модели** двух радиотехнических генераторов, связанных через мемристор и описываются **методы численного исследования** данной модели.

Обобщенная схема исследуемой радиотехнической цепи приведена на рис.1. Каждый парциальный автогенератор состоит из параллельно соединенных емкости  $C_j$ , индуктивности  $L_j$ , постоянной проводимости  $g_j$  и нелинейной отрицательной проводимости  $N_j$ , где  $j = 1, 2$  - номер парциального генератора.  $G_M(\varphi)$  – характеристика мемристивного элемента, представляющая собой зависимость проводимости двухполюсника от магнитного потока  $\varphi$ . Обозначения размерных динамических переменных (токов и напряжений) приведены на схеме.

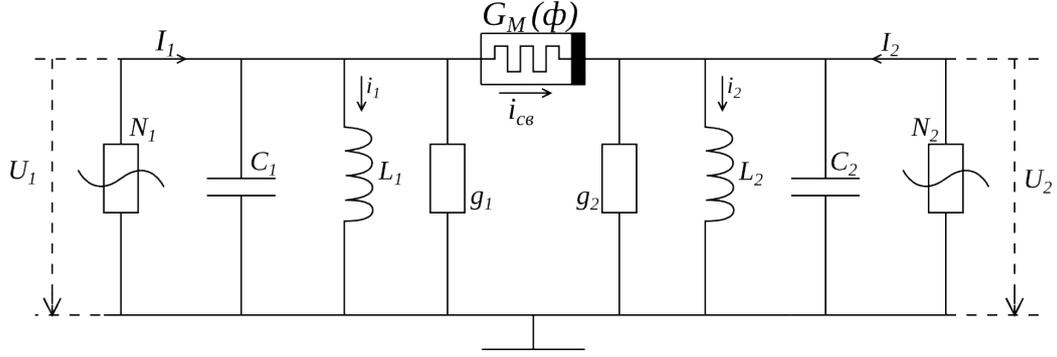


Рис. 1: Исследуемая система

Характеристики отрицательных проводимостей  $N_j$  задаются в виде кубических функций

$$I_j = \alpha_j U_j - \beta_j U_j^3, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

где  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  - размерные коэффициенты. В качестве мемристора будем рассматривать идеализированный мемристор Чуа, характеристика которого имеет вид кусочно-линейной зависимости:

$$G_M(\varphi) = A \quad \varphi < \varphi_0, \quad B \quad \varphi \geq \varphi_0. \quad (4)$$

По правилам Кирхгофа можно получить следующие уравнения системы:

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dt} + \frac{1}{C_1} i_1 + \frac{g_1}{C_1} U_1 + \frac{G_M(\varphi)}{C_1} (U_1 - U_2) - \frac{\alpha_1}{C_1} U_1 + \frac{\beta_1}{C_1} U_1^3 &= 0, \\ \frac{dU_2}{dt} + \frac{1}{C_2} i_2 + \frac{g_2}{C_2} U_2 - \frac{G_M(\varphi)}{C_2} (U_1 - U_2) - \frac{\alpha_2}{C_2} U_2 + \frac{\beta_2}{C_2} U_2^3 &= 0, \\ \frac{1}{C_1} \frac{di_1}{dt} &= \frac{1}{C_1 L_1} U_1, \\ \frac{1}{C_2} \frac{di_2}{dt} &= \frac{1}{C_2 L_2} U_2, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= U_1 - U_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим  $\frac{1}{L_1 C_1} = \omega_1^2$  и  $\frac{1}{L_2 C_2} = \omega_2^2$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – собственные частоты парциальных автогенераторов. Положим  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ,  $g_1 = g_2 = g$ ,  $C_1 = C_2 = C$ , но  $L_1 \neq L_2$ , и, следовательно,  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Введем безразмерное время  $\tau = \omega_1 t$ ,  $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \omega_1 \frac{d}{d\tau}$ . Обозначим отношение частот как  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = p$  и проведем замену переменных:  $U_1 \sqrt{\frac{\beta}{C\omega_1}} = x_1$ ,  $U_2 \sqrt{\frac{\beta}{C\omega_1}} = x_2$ ,  $\phi \omega_1 \sqrt{\frac{\beta}{C\omega_1}} = \hat{z}$ ,  $\frac{\alpha - g}{C\omega_1} = \gamma$  и  $\frac{G_M(\phi)}{C\omega_1} = kM(z)$ . Тогда, введя новые переменные  $y_1 = \int x_1 d\tau$ ,  $y_2 = \int x_2 d\tau$ , из (5) получаем систему пяти уравнений первого порядка в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + y_1 - (\gamma - x_1^2)x_1 + kM(z)(x_1 - x_2) &= 0, \\ \dot{x}_2 + py_2 - (\gamma - x_2^2)x_2 - kM(z)(x_1 - x_2) &= 0, \\ \dot{y}_1 &= x_1, \\ \dot{y}_2 &= x_2, \\ \dot{z} &= x_1 - x_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Система уравнений (6) является исследуемой моделью в проведенной работе.

Характеристика мемристора в безразмерных переменных задается как

$$M(z) = a \quad z < 1, \quad b \quad z \geq 1, \tag{7}$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые безразмерные параметры. Такой мемристор является идеализацией мемристивного сопротивления, предложенной Л. Чуа.

Легко получить точки равновесия системы (6):  $x_{1,2} = 0, y_{1,2} = 0$ . При этом координата  $z$  принимает любые значения. Таким образом, в системе (6) имеется линия равновесий, совпадающая с осью  $OZ$ .

Для выполнения численных исследований была написана программа интегрирования уравнений (6) по методу Рунге-Кутты 4-го порядка. Шаг интегрирования фиксировался постоянным и достаточно малым  $h = 0.001$ . Время интегрирования варьировалось, но, как правило, составляло несколько тысяч периодов колебаний. По полученным результатам строились проекции фазовых портретов колебаний и определялись полные мгновенные фазы колебаний парциальных генераторов. Полные фазы генераторов  $\Phi_1(t)$  и  $\Phi_2(t)$  рассчитывались по формуле

$$\Phi_i(t) = \operatorname{arctg} \frac{y_i(t)}{x_i(t)} \pm \pi n(t), \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

где  $n(t)$  - целочисленная переменная, определяемая из условия непрерывности зависимости фазы от времени.

Зная мгновенные фазы генераторов и их разность  $\Delta\Phi(t) = \Phi_2(t) - \Phi_1(t)$  легко определить среднюю разностную частоту (частоту биений):

$$\Omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta\Phi(t+T) - \Delta\Phi(t)}{T}, \quad (9)$$

В численных экспериментах время наблюдения  $T$  полагалось конечным, но достаточно большим. Очевидно в области синхронизации в пределах точности вычислений должно выполняться равенство:

$\Omega = 0$ . При больших значениях параметра связи синхронизация может происходить через подавление автоколебаний одного из генераторов. В этом случае расчет частоты биений по формуле (9) не дает корректных результатов.

При проведении исследований строились зависимости разности фаз генераторов и частоты биений от начального значения  $z_0$  и от расстройки в системе при различных начальных условиях и различных значениях параметров.

В Разделе 2 представлена **практическая часть работы**. При проведении исследований системы связанных через мемристор генераторов Ван дер Поля (6) параметры мемристора  $a$  и  $b$  фиксировались постоянными:  $a = 0.02$  и  $b = 2.0$ . Параметр генерации  $\gamma$  также был неизменным:  $\gamma = 0.1$ . В качестве управляющих параметров рассматривались расстройка частот  $p$  и коэффициент связи  $k$ . Были исследованы особенности взаимодействия через мемристор двух полностью идентичных генераторов Ван дер Поля (без частотной расстройки) и двух генераторов Ван дер Поля, имеющих небольшую расстройку частот автоколебаний.

Главным вопросом, на который предполагалось ответить **при исследовании взаимодействия идентичных генераторов**, был вопрос о зависимости установившихся колебаний от начальных условий. Наличие оси равновесий в данной системе и особенности динамики систем с осью равновесий давали основание предполагать на-

личие такой зависимости. Предварительные расчеты, проведенные для системы (6) при  $p = 1$ ,  $k = 0.1$  с использованием ограниченного времени установления действительно показали, что при различных начальных условиях можно наблюдать колебания с различным сдвигом фаз парциальных систем. В дальнейшем, при проведении вычислений на более длительных временах, стало ясно, что для любых начальных условий в пределе  $t \rightarrow \infty$  колебания становятся синфазными.

На рис. 2 показаны зависимости сдвига фаз генераторов от начального значения переменной  $z(0) = z_0$ , полученные при использовании одного и того же времени расчета ( $T = 10000$  безразмерных единиц) и разных значений времени установления  $t$ . Легко видеть, что установлению стационарного состояния предшествует длительный переходный процесс (длительность порядка 35000 безразмерных единиц времени): при малом времени установления  $t$  разность фаз меняется в широком диапазоне в зависимости от начальных условий, однако с ростом времени счета диапазон изменения стремится к нулю. Таким образом, вне зависимости от  $z_0$  наступает синфазная синхронизация. Величина  $z_0$  влияет только на время установления синхронизации.

Главная часть работы состояла в **исследовании системы (6) при наличии частотной расстройке** ( $p \neq 1$ ). Для диагностики взаимного захвата частот и фаз генераторов будем использовать ча-

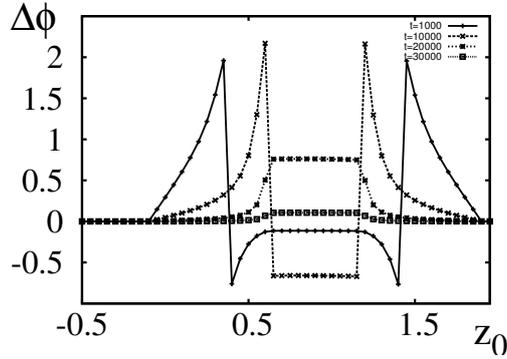


Рис. 2: Зависимости разности фаз генераторов от начального значения переменной  $z_0$  для различной длительности времени установления  $t$  при начальных значениях переменных  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.5, y_2(0) = -0.4$  и коэффициенте связи  $k = 0.01$

стоту биений  $\Omega$  (9). Зависимость  $\Omega$  от параметра расстройки  $p$  позволяет установить эффект захвата и определить интервал синхронизации. Границы этого интервала несколько изменяются в зависимости от начальных условий.

Для иллюстрации поведения системы при наличии и отсутствии синхронизации в случае фиксированной расстройки и различных начальных условий на рис. 3 приведены трехмерные проекции фазовых портретов колебаний. На фрагменте а) представлен фазовый портрет в области синхронизации. Его вид качественно не меняется при изменении начальных условий. На фрагменте б) изображен фазовый портрет для случая, когда генераторы не синхронизированы. В зависимости от выбора начальных условий изменяется количество «перемычек», соответствующих разности фаз между генераторами, равной  $\pi n, n \in Z$ .

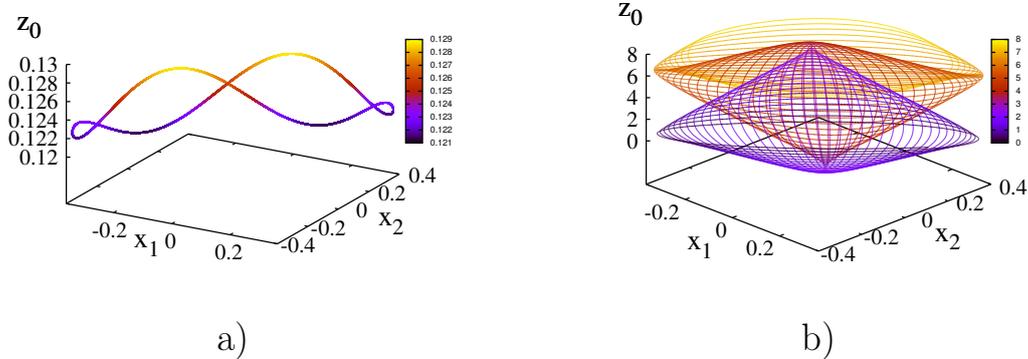


Рис. 3: Трехмерные проекции фазовых портретов колебаний в системе (6) при фиксированном значениях параметров  $p = 1.05$ ,  $k = 0.1$  и старте с различных начальных условий: а)  $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.5, y_2 = -0.4, z_0 = -0.5$  ; б)  $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.5, y_2 = -0.4, z_0 = 0.5$  ;

На основании анализа зависимостей частоты биений от частотной расстройки для разных значений коэффициента связи  $k$ , были построены границы областей синхронизации для разных значений начальных условий (рис. 4). На рисунке можно видеть семейство вложенных областей, ширина которых существенным образом различается. Для одних начальных условий область синхронизации оказывается очень узкой, для других – широкой.

В **заключении** приводятся основные результаты работы. В результате проведенных численных исследований полученной модели был выявлен ряд особенностей поведения автогенераторов, связанных через мемристор.

1. В случае взаимодействия полностью идентичных генераторов установившийся режим соответствует синфазным колебаниям в парци-

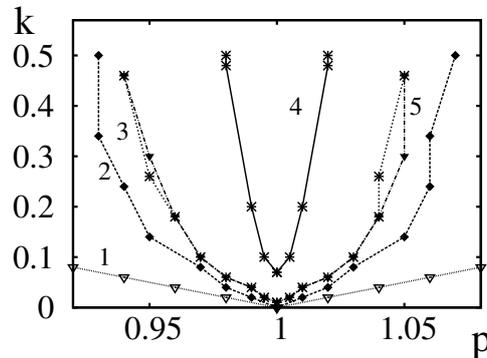


Рис. 4: Границы областей синхронизации на плоскости параметров "расстройка-коэффициент связи" для различных наборов начальных условий

альных системах, однако мемристивный характер взаимодействия приводит к длительному процессу установления разности фаз, зависящему от начальных условий. 2. При введении частотной расстройки генераторов была обнаружена зависимость границ области синхронизации от начальных условий. В зависимости от начальных значений динамических переменных ширина области частотно-фазового захвата меняется в широких пределах. Данный эффект установлен впервые и не известен в научной литературе.

Таким образом, было показано, что связь автогенераторов через мемристор приводит к особому типу поведения взаимодействующих систем. При этом синхронизацией парциальных систем можно управлять, изменяя начальные условия.

В конце работы приводится **список используемых источников**, включающий 34 наименования.