

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиотехники и электродинамики
наименование кафедры

**Метод интегральных уравнений для анализа поверхностных
плазмонов**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВАРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 4 курса 422 группы

направления (специальности) 03.03.03 Радиофизика
код и наименование направления (специальности)

физического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Иванов Степан Андреевич
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
д.ф.-м.н., проф. Давидович М.В. _____ _____
должность, ученая степень, звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав.кафедрой
д.ф.-м. н., проф. Глухова О.Е. _____ _____
должность, ученая степень, звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение.

В настоящее время всё большее внимание уделяется метаповерхностям и плазмон-поляритонам (ПП) вдоль них [1–12], так как структуры с поверхностными плазмонами (ПП) имеют обширные сферы для приложений. Локализованные поверхностные плазмоны и используются как средство передачи информации в чипах. Они могут поддерживать частоты в терагерцовых диапазонах. Обычно используют метод сшивания. Метод сшивания приводит к дисперсионному уравнению (ДУ), при этом возможны строгие методы и квазистатическое рассмотрение. Эти методы не позволяют нам, учесть ряд эффектов, связанных с наличием 2D периодической структуры, шероховатостью поверхности и наличием на ней трехмерной структуры. Это нам позволяет делать метод интегральных уравнений (ИУ). Метод сшивания можно применять непосредственно, через привлечение метода матриц передачи либо метода трансформации импедансов. В какой угодно из 2-ух границ конечной структуры возможно поставить два граничных условия: вытекания и втекания волны. Для втекающей волны ДУ в виде равенства нулю определителя однородной системы прямолинейных уравнений, получаемой из нагруженной двухполюсниками матрицы передачи. Оно имеет тип равенства входного сопротивления структуры волновому сопротивлению граничащей с ней среды, т.е. получается приравниванием нулю соответствующего коэффициента отражения R . Способ сшивания более удобен для плоскоструктур. Направим внешнюю нормаль к ним по z . В таком случае систему координат можно будет повернуть так, что Е-ПП имеет следующие компоненты E_x, E_z, H_y , а Н-ПП соответственно имеет компоненты H_x, H_z, E_y . Введем нормированные импедансы в слоях: $\rho_i^e = k_{iz} / \epsilon_0 \epsilon_i$, $\rho_i^h = k_0 \mu_i / k_{iz}$, где $k_{iz} = \sqrt{k_0^2 \epsilon_i \mu_i - k_x^2}$ – компонента волнового вектора. Требуется определить дисперсию k_x . Если будет отсутствовать коэффициент отражения при падении плоской волны на диэлектрическое полупространство соответствует

углу Брюстера [34], при этом в вакууме k_x и k_z действительные. Если присутствует диссипация, а угол комплексный, то это означает отсутствие полного отражения. Условие $R=0$ означает переход от задачи дифракции к задаче о свободных волнах, при этом k_x становится комплексным, что характерно для ПП. Для симметричных по z структур ПП обычно классифицируют по четности и нечетности поперечных компонент относительно z . Относительно продольной компоненты классификация противоположная. Для ПП вдоль структур с двумя конечными поперечными размерами число компонент равно пяти, и удобна классификация по четности-нечетности одной продольной компоненты по двум поперечным координатам. Метод сшивания для таких структур встречает трудности, как и для поперечно-неоднородных структур. Для сложных структурированных поверхностей удобно использовать приближенные импедансные, при этом метод сшивания приводит к поверхностным интегральным уравнениям.

Цель данной работы – Целью работы является, изучение теоретических методов интегральных уравнений, на примере решения тестовой задачи, определение дисперсионной зависимости плазмона вдоль метаповерхности.

Составить программу реализующую алгоритм расчета, дисперсионной зависимости.

С помощью составленной программы получить дисперсионной зависимость для поверхностного плазмона.

1. Рассмотрение возбуждение диэлектрической пластины.

Рассмотрим задачу возбуждения пластины в области $z_1 < z < z_2$ из магнетодиэлектрика $\epsilon(\vec{r}), \mu(\vec{r})$ плоской волной. В случае волны p -поляризации пишем для нее $\mathbf{E}_0 = \hat{x}_0 E_{0x} + \hat{z}_0 E_{0z} \exp\{ik_x x + ik_{0z} z\}$, а для волны s -поляризации соответственно $\mathbf{E}_0 = \hat{y}_0 E_{0y} \exp\{ik_x x + ik_{0z} z\}$. Здесь компонента $k_x \leq k_0$ действительная, $k_{0z} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$, и они определяют угол падения φ , при этом $E_{0x} = E_0 \cos \varphi$, $E_{0z} = E_0 \sin \varphi$. Все фазы отсчитываем от $z = z_2$. Из решения задачи о возбуждении получим задачу о свободных волнах, наложив на коэффициент отражения условие $R=0$. Решение задачи ищем в виде $\mathbf{E} = \hat{x}_0 E_x(\vec{r}) + \hat{z}_0 E_z(\vec{r}) \exp\{ik_x x\}$, $\mathbf{H} = \hat{y}_0 H_y(\vec{r}) \exp\{ik_x x\}$ для p -поляризации, и $\mathbf{H} = \hat{x}_0 H_x(\vec{r}) + \hat{z}_0 H_z(\vec{r}) \exp\{ik_x x\}$, $\mathbf{E} = \hat{y}_0 E_y(\vec{r}) \exp\{ik_x x\}$ для s -поляризации. Имеем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^e \\ \mathbf{A}^m \end{pmatrix} = i\omega\epsilon_0 \exp\{ik_x x\} \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix} \int_{z_1}^{z_2} G(\vec{r}, z') \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon(\vec{r}') - 1 \\ \mu(\vec{r}') - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_0 E_x(\vec{r}') + \hat{z}_0 E_z(\vec{r}') \\ \hat{y}_0 H_y(\vec{r}') \end{pmatrix} \right\} dz'.$$

(25)

Находим поля дифракции:

$$\mathbf{E}_d^e = \frac{\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}^e + k_0^2 \mathbf{A}^e}{i\omega\epsilon_0}, \quad \mathbf{H}_d^e = \nabla \times \mathbf{A}^e, \quad (26)$$

$$\mathbf{E}_d^h = -\nabla \times \mathbf{A}^m, \quad \mathbf{H}_d^h = \frac{\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}^m + k_0^2 \mathbf{A}^m}{i\omega\mu_0}, \quad (27)$$

откуда получаем ИУ:

$$\mathbf{E}^{\epsilon, h}(\vec{r}, z) = \mathbf{E}_0^{\epsilon, h}(\vec{r}, z) + \mathbf{E}_d^{\epsilon, h}(\vec{r}, z), \quad \mathbf{H}^{\epsilon, h}(\vec{r}, z) = \mathbf{H}_0^{\epsilon, h}(\vec{r}, z) + \mathbf{H}_d^{\epsilon, h}(\vec{r}, z). \quad (28)$$

Эти ИУ можно решать, как относительно полных полей, так и относительно полей дифракции. Заметим, что поля дифракции представляются через полные поля. Выражая из уравнений Максвелла одно из полей, например, $\mathbf{H} = \epsilon(\vec{r}) \nabla \times \mathbf{E}$ и подставляя в (28), получаем ИДУ относительно другого поля. Можно сформулировать несколько ИДУ относительно полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , или только относительно поля \mathbf{E} или \mathbf{H} и решать их независимо. Упрощение

происходит, если у пластины нет магнитных или диэлектрических свойств.

Пусть $\mu = 1$. Тогда для $\mathbf{A}^m = 0$, и для Е-ППИ имеем

$$\mathbf{E}(\zeta) = \mathbf{E}_0 \exp(k_{0z} z) + \int_{z_1}^{z_2} \left[k_0^2 E_x(\zeta') - ik_x z_0 E_z(\zeta') \frac{\partial}{\partial z} \right] \bar{G}(\zeta - z') \mathbf{E}(\zeta') dz', \quad (29)$$

$$H_y(\zeta) = H_{0y} \exp(k_{0z} z) + i\omega \varepsilon_0 \int_{z_1}^{z_2} \left[E_x(\zeta') \frac{\partial}{\partial z} + ik_x E_z(\zeta') \right] \bar{G}(\zeta - z') \mathbf{E}(\zeta') dz'. \quad (30)$$

Можно решать ИУ (29) относительно электрического поля. Выражая из уравнения Максвелла электрическое поле

$$E_x = -(\omega \varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} H_y, \quad E_z = -k_x (\omega \varepsilon_0 \varepsilon)^{-1} H_y, \quad (31)$$

и подставляя его в (30), получим скалярное ИДУ относительно $H_y(\zeta)$.

Указанные уравнения можно преобразовать методом интегрирования по частям [29], перенося оператор $\partial/\partial z$ с экспоненциального ядра на компоненты электрического поля. Тогда получаем ИДУ. Сведение всех уравнений к ДУ осуществляется скалярным умножением на некий вектор $\mathbf{F}(\zeta)$ и интегрированием по области (ζ_1, ζ_2) [25]. ДУ получается как билинейный функционал. Для (29) удобно взять $\mathbf{F}(\zeta) = \mathbf{E}(\zeta)$, а для (44) $\mathbf{F}(\zeta) = y_0 H_y(\zeta)$. Действие оператора $\partial/\partial z$ в функционалах можно перенести с ядра на $\mathbf{F}(\zeta)$. Во всех случаях возникают две константы, связанные с подстановками в точках z_1, z_2 . Разложение полей по базисам сводит функционалы к соответствующим билинейным или квадратичным формам, экстремумы которых приводят к однородной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Коэффициент отражения R получаем после нахождения решения путем вычисления амплитуды дифрагированного поля в точке z_2 , а коэффициент прохождения определяется как сумма падающего и дифрагированного поля в точке z_2 . Полагая $R = 0$, получаем ДУ, при этом следует считать k_x комплексным и определять из него. Уравнения возбуждения также сводятся к уравнениям для свободных волн при отсутствии поля падающей волны. В этом случае равный нулю определитель однородной СЛАУ и есть ДУ. В случае $z_1 = -z_2 = -h/2$, $\varepsilon(\zeta) = \varepsilon = const$ имеем

однородную пластину, для которой, как нетрудно проверить, $H_y(\omega, z) = H_0 \cos(\omega z)$ и $H_y(\omega, z) = H_0 \sin(\omega z)$ есть решения ИДУ (30), если электрическое поле взять из уравнений (31). Вне пластины поле удовлетворяет волновому уравнению и условиям излучения. Было показано, что решение ИУ удовлетворяет условиям на границе раздела сред. В первом случае имеем четный по поперечным компонентам и нечетный по $E_x(\omega)$ Е-ПП (в области $z=0$ электрическая стенка). Во втором случае плазмон нечетный по поперечным компонентам и четный по $E_x(\omega)$ (магнитная стенка при $z=0$). Методом сшивания для них получаются ДУ

$$k_{ex}^e = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \tanh^2(\theta) \varepsilon}{\varepsilon^2 \tanh^2(\theta) - 1}}, \quad k_{ox}^e = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon \tanh^2(\theta)}{\varepsilon^2 - \tanh^2(\theta)}}. \quad (32)$$

Здесь $\theta = -ik_z h/2$. В отсутствии диссипации для медленного ПП $\varepsilon < -1$, и угол θ действительный. Функционал для k_x^2 получаем умножением (30) на $H_y(\omega, z)$ и интегрированием:

$$k_x^2 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} H_y^2(\omega, z) dz + \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} (-\varepsilon^{-1} \omega' H_y(\omega, z) H_y'(\omega', z') \frac{\partial}{\partial z} G(\omega - z', z) dz' dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} H_y(\omega, z) H_y(\omega', z') G(\omega - z', z) (-\varepsilon^{-1} \omega') dz' dz}. \quad (33)$$

Он требует итерационного решения совместно с ИУ

$$H_y(\omega, z) = \int_{z_1}^{z_2} \left[H_y'(\omega, z') \frac{\partial}{\partial z} + k_x^2 H_y(\omega, z') \right] G(\omega - z', z) (-\varepsilon^{-1} \omega') dz', \quad (34)$$

которое следует из (30) [25], поскольку в правую часть входит k_x . Интеграл по z в двойном интеграле числителя (47) преобразуется к виду:

$$f(\omega, z) = \int_{-h/2}^{h/2} H_y'(\omega, z') \frac{\exp(i k_{0z} |z - z'|)}{2i k_{0z}} dz',$$

где $f(\omega, z) = G(\omega - z', z) H_y(\omega, z) \Big|_{z=-h/2}^{z=h/2}$. Интеграл по z' в двойном интеграле числителя (33) с использованием свойства $\omega / \partial z G(\omega - z', z) = -\omega / \partial z' G(\omega - z', z)$ преобразуется к виду:

$$-g(\omega, z) = \int_{-h/2}^{h/2} H_y''(\omega, z') G(\omega - z', z) (-\varepsilon^{-1} \omega') dz' + \int_{-h/2}^{h/2} H_y'(\omega, z') G(\omega - z', z) \varepsilon^{-2} \omega' \varepsilon' dz'.$$

Здесь $g(\epsilon) = \int_{-h/2}^{h/2} H'_y(\epsilon) G(\epsilon - z') \mathcal{X}^{-\epsilon^{-1}(\epsilon')} \Big|_{z'=-h/2}^{z'=h/2}$. В силу уравнений Максвелла в первом интеграле вторую производную можно заменить: $H''_y = \epsilon_x^2 - k_0^2 \epsilon \bar{H}_y$.

Тогда функционал (33) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon(\epsilon') \bar{H}_y(\epsilon) H_y(\epsilon') G(\epsilon - z') \bar{d}z' dz \\
 & k_0^2 \frac{\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} (-\epsilon^{-1}(\epsilon')) \bar{H}_y(\epsilon) H_y(\epsilon') G(\epsilon - z') \bar{d}z' dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} H_y(\epsilon) H_y(\epsilon') G(\epsilon - z') \mathcal{X}^{-\epsilon^{-1}(\epsilon')} \bar{d}z' dz} = \\
 & = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} H_y^2(\epsilon) g(\epsilon) \bar{d}z + \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} H_y(\epsilon) H_y(\epsilon') G(\epsilon - z') \bar{\epsilon}^{-2}(\epsilon') \bar{\epsilon}'(\epsilon') \bar{d}z' dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} H_y(\epsilon) H_y(\epsilon') G(\epsilon - z') \mathcal{X}^{-\epsilon^{-1}(\epsilon')} \bar{d}z' dz}.
 \end{aligned}$$

(35)

Он упрощается в случае однородной ДП:

$$k_0^2 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} H_y^2(\epsilon) g(\epsilon) \bar{d}z}{\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} H_y(\epsilon) H_y(\epsilon') G(\epsilon - z') \bar{d}z' dz}. \quad (36)$$

Классификация ПП в (32) противоположна той, что используется обычно: она выполнена по компоненте $E_x(\epsilon)$, где индекс e означает четность, а o - нечетность. На рис. 1 представлена дисперсия ПП (32) и аналогичные результаты, полученные из функционала для однородной и неоднородной пластины с симметричной ДП, в которой $\omega_p(\epsilon) = \omega_{p0} (1 + \delta \cos(\epsilon z/h))$. Для четной функции $H_y(\epsilon)$ функция $f(\epsilon)$ нечетная, а функция $g(\epsilon)$ четная. Для нечетной функции $H_y(\epsilon)$ функция $f(\epsilon)$ четная, а функция $g(\epsilon)$ нечетная. Производная ФГ в (47) имеет вид $\partial/\partial z G(\epsilon - z') = -\text{sgn}(\epsilon - z') \exp(i k_{0z} |z - z'|)$. При вычислении (47) использованы точные моды однородной пластины, в которых ДП считалась неоднородной. Например, для нечетной моды $H_y = H_0 \cos(\sqrt{k_0^2 \epsilon - k_x^2})$, а для четной $H_y = H_0 \sin(\sqrt{k_0^2 \epsilon - k_x^2})$.

2. Определение дисперсионной зависимости.

Для определение вида дисперсионной зависимости плазмона, вдоль

метаповерхности, метаповерхность представляет собой простейший случай, когда неоднородная. Тогда был взят Функционал для:

$$k_x^2 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} H_y^2 \epsilon \bar{d}z + \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} (-\epsilon^{-1} \epsilon' \bar{H}_y \epsilon' \bar{H}_y \epsilon' \frac{\partial}{\partial z} G \epsilon - z' \bar{d}z' dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} H_y \epsilon' \bar{H}_y \epsilon' \bar{G} \epsilon - z' \bar{d}z' \bar{d}z \bar{d}z' dz}.$$

(33)

Он требует итерационного решения совместно с ИУ

$$H_y \epsilon' \bar{d}z' \bar{d}z' = \int_{z_1}^{z_2} \left[H_y' \epsilon' \frac{\partial}{\partial z} + k_x^2 H_y \epsilon' \right] G \epsilon - z' \bar{d}z' \bar{d}z' \bar{d}z',$$

(34)

поскольку в правую часть входит k_x . Интеграл по z в двойном интеграле числителя (33) преобразуется к виду:

$$f \epsilon' \bar{d}z' = \int_{-h/2}^{h/2} H_y' \epsilon' \frac{\exp \left(ik_{0z} |z - z'| \right)}{2ik_{0z}} \bar{d}z,$$

Интеграл по z' в двойном интеграле числителя (33) с использованием свойства $\partial / \partial z \bar{G} \epsilon - z' \bar{d}z' = -\partial / \partial z' \bar{G} \epsilon - z' \bar{d}z'$ преобразуется к виду:

$$-g \epsilon' \bar{d}z' + \int_{-h/2}^{h/2} H_y'' \epsilon' \bar{G} \epsilon - z' \bar{d}z' \bar{d}z' + \int_{-h/2}^{h/2} H_y' \epsilon' \bar{G} \epsilon - z' \bar{d}z' \bar{d}z' \bar{d}z'.$$

Здесь $g \epsilon' \bar{d}z' = \int_{z'=-h/2}^{z'=h/2} H_y' \epsilon' \bar{G} \epsilon - z' \bar{d}z' \bar{d}z'$. В силу уравнений Максвелла в первом интеграле вторую производную можно заменить: $H_y'' = \epsilon_x^2 - k_0^2 \epsilon \bar{H}_y$.

Тогда функционал (33) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon \epsilon' \bar{d}z \bar{d}z' - 1 \bar{H}_y \epsilon' \bar{H}_y \epsilon' \bar{G} \epsilon - z' \bar{d}z' dz \\ & k_0^2 \frac{\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} (-\epsilon^{-1} \epsilon' \bar{H}_y \epsilon' \bar{H}_y \epsilon' \bar{G} \epsilon - z' \bar{d}z' dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} H_y \epsilon' \bar{H}_y \epsilon' \bar{G} \epsilon - z' \bar{d}z' \bar{d}z' dz} = \\ & = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} H_y^2 \epsilon \bar{d}z + g \epsilon' \bar{H}_y \epsilon' \bar{d}z + \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} H_y \epsilon' \bar{H}_y \epsilon' \bar{G} \epsilon - z' \bar{d}z' \bar{d}z' \bar{d}z' dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} H_y \epsilon' \bar{H}_y \epsilon' \bar{G} \epsilon - z' \bar{d}z' \bar{d}z' dz}. \end{aligned} \quad (35)$$

Он упрощается в случае однородной диэлектрической проницаемости:

$$\text{-----} \tag{36}$$

Используя метод итерации

$$\text{-----} \tag{37}$$

Таким образом соотношения (37) и (36) решались совместно, то есть k_x подставлялось в соотношение (37), затем полученное из него подставлялось в соотношение (36). Процедура проходила столько раз, пока выполнялось условие $|k_x^{(i)} - k_x^{(i-1)}| < \epsilon$, где i — номер итерации, а ϵ — точность вычисления k_x .

Для реализации расчёта данной задачи была написана программа, с помощью которой были получены результаты:

На основе полученных результатов, был построен график дисперсионной зависимости:

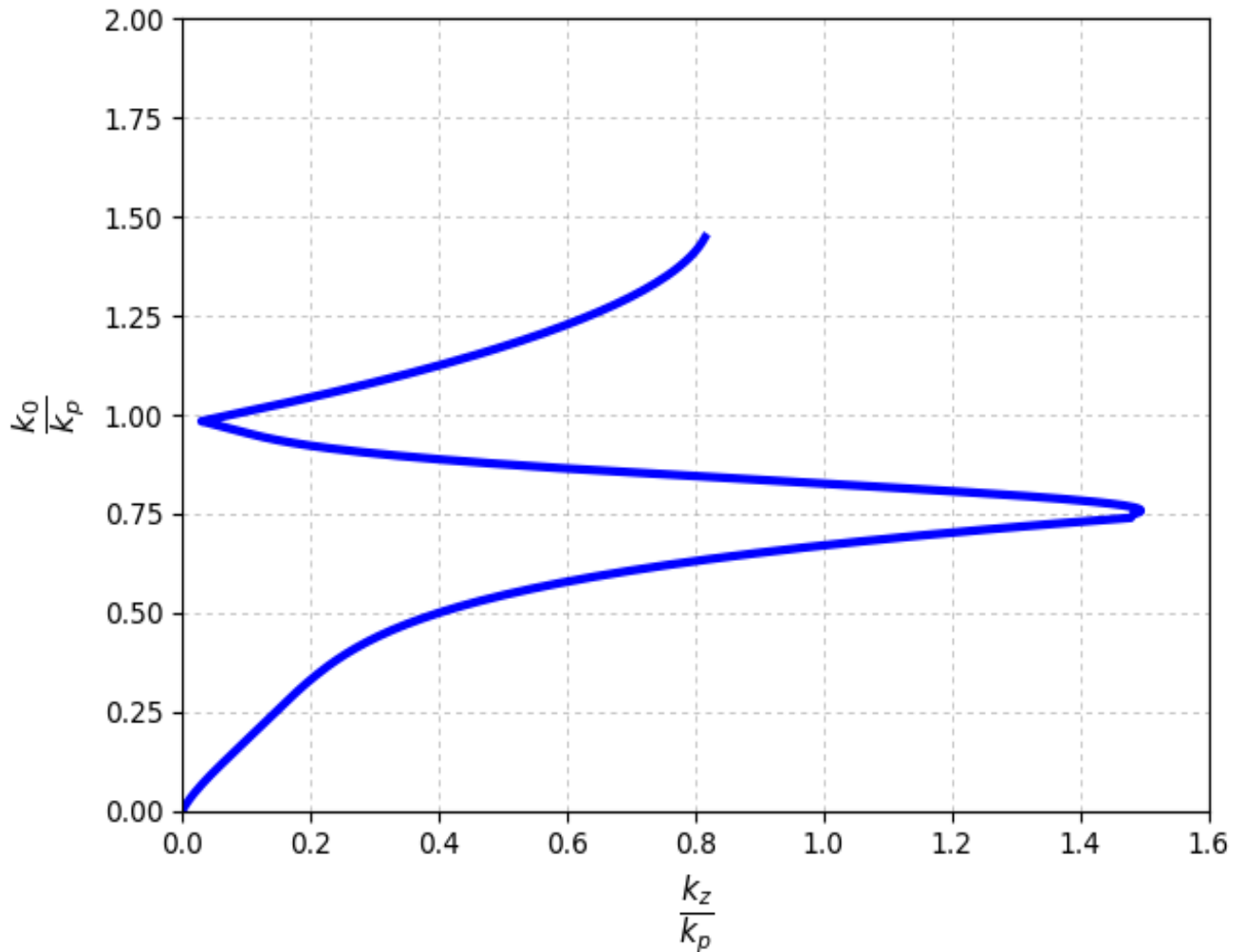


Рис. 3 Результат вычисления дисперсии плазмона на метаповерхности для уравнения (35).

Заключение.

В работе приведены электродинамические тензорные функции Грина, на основе которых получены ИУ и ДУ, пригодные для анализа дифракции волн и дисперсии ПП. Уравнения пригодны для произвольных конфигурационной сложных метаповерхностей. Результаты позволяют получать эффективные поверхностные проводимости путем применения метода гомогенизации. Метод интегральных уравнений позволяет решить задачи для сложных поверхностей. Был получен результат вычисления дисперсии плазмона на простой метаповерхности, когда эpsilon неоднородная, если же эpsilon будет однородной это может быть дальнейшими исследованиями.