

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Бифуркационный анализ структуры окон периодичности в системе
связанных нелинейных отображений**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 03.03.03 «Радиофизика»

факультета нелинейных процессов

Дасаева Романа Геннадьевича

Научный руководитель
доцент КФОС, к.ф.-м.н

Савин Д. В.

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

Короновский. А. А.

Саратов 2017 г.

Введение

Как известно, динамические системы делятся на консервативные и диссипативные. Для первого типа характерно сохранение фазового объёма с течением времени, для второго типа – сжатие фазового пространства и образование аттракторов.

Нелинейные динамические системы могут демонстрировать множество различных динамических режимов, таких как неподвижные точки, периодические и квазипериодические орбиты, а также хаотическое движение, в зависимости от выбора параметров системы. Сценарии перехода между этими динамическими режимами на данный момент достаточно хорошо изучены. Это переход к хаосу через каскад удвоения периода, квазипериодичность и перемежаемость [1].

Во многих случаях хаотическая область содержит области периодических движений с различными периодами, которые называют окнами периодичности. В частности, окна периодичности обязательно присутствуют в области хаотического аттрактора, образовавшегося в результате каскада бифуркаций удвоения периода [1]. Такое сочетание предсказуемого периодического и нерегулярного хаотического режимов делает динамику системы достаточно сложной, так как малое изменение параметров данной системы может перевести ее из периодического режима в хаотический и наоборот.

Системы с динамикой, в которой присутствуют такие окна периодичности, имеют место в разных областях науки. Например, в лазерной физике, физике атмосферы и химии [2]. Существует большое количество работ, посвященных анализу закономерностей, которым подчиняется организация окон периодичности многопараметрических нелинейных систем (например, [3, 4]). Как правило, особенности структуры окон периодичности не оказывают влияния на устройство границы хаотической области на

плоскости параметров. Известно, однако, что в связанных системах при изменении уровня диссипации может происходить слияние окна периодичности с основной периодической областью, что приводит к разрыву линии перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [5]. В настоящей работе предполагается провести детальный анализ этого процесса и изменений, происходящих при этом в структуре окна периодичности, для системы связанных отображений Эно.

Методами исследования являются компьютерное моделирование системы и бифуркационный анализ при помощи специализированного программного обеспечения; визуализация результатов на фазовых портретах, бифуркационных диаграммах и картах динамических режимов.

1. Эволюция плоскости параметров

Для изучения динамики связанных нелинейных отображений в качестве исследуемой системы рассматриваются два консервативно связанных отображения Эно:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda_1 x_n^2 - b y_n + \varepsilon (x_n - u_n), & y_{n+1} &= x_n, \\u_{n+1} &= 1 - \lambda_2 u_n^2 - b v_n + \varepsilon (u_n - x_n), & v_{n+1} &= u_n,\end{aligned}\tag{1}$$

где λ_1, λ_2 – параметры нелинейности отображений; b – параметр затухания системы, характеризующий уровень диссипации; ε – коэффициент связи двух отображений системы; x, y, u, v – динамические переменные.

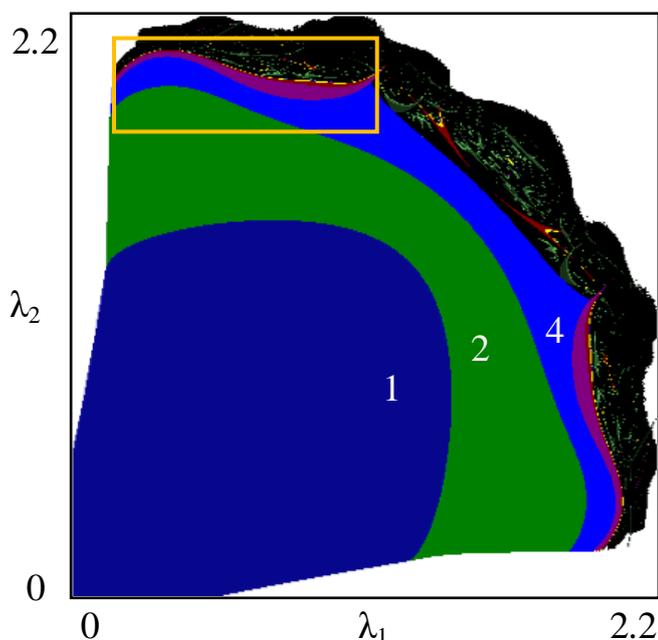


Рисунок 1. Карта динамических режимов для связанных отображений Эно на плоскости управляющих параметров при $\varepsilon = 0.4$ и $b = 0.3$.

Область на рисунке 1, ограниченная рамкой, соответствует переходу к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода (сценарий Фейгенбаума). На плоскости управляющих параметров в ограниченной области линии удвоения периода при увеличении параметра λ_2 в пределе стремятся к линии, за которой начинается хаотическая область. Эта линия называется линией Фейгенбаума.

Теперь для дальнейшего исследования необходимо зафиксировать коэффициент связи и не менять его ($\varepsilon = 0.4$), но менять параметр затухания b . При увеличении этого параметра уровень диссипации уменьшается.

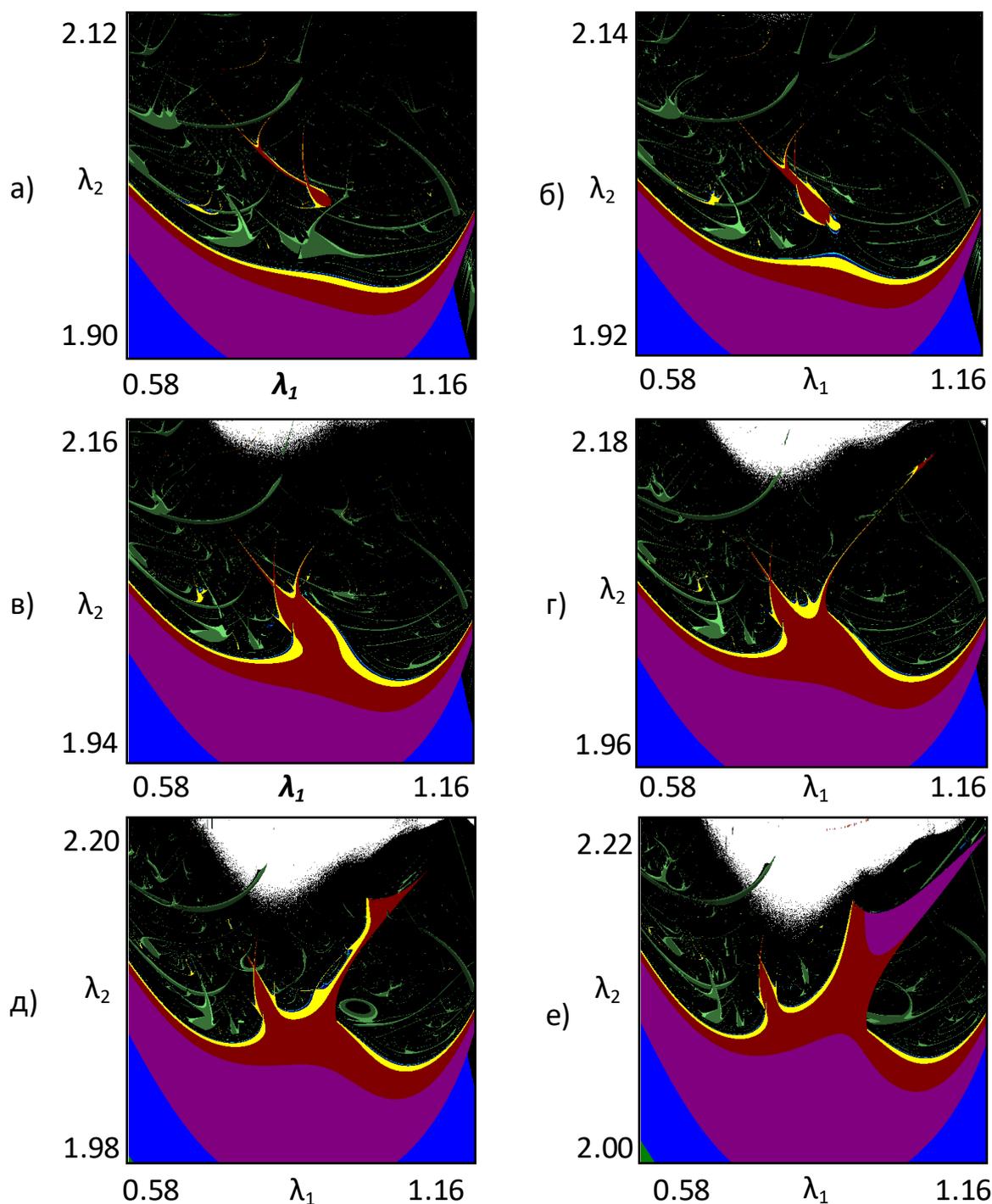


Рисунок 2. Изменение плоскости параметров в окрестности окна периодичности при
 а) $b = 0.30$; б) $b = 0.32$; в) $b = 0.34$; г) $b = 0.36$; д) $b = 0.38$; е) $b = 0.4$.

На рисунке 2 изображено изменение структуры плоскости управляющих параметров в зависимости от изменения уровня диссипации в окрестности окна периодичности.

Можно видеть, что окна периодичности, которые присутствуют в области хаотического режима, смещаются с увеличением значения параметра диссипации и приближаются к основной периодической области (рисунки 2а и 2б). Далее такое окно сливается с основной периодической областью (рисунок 2в), что приводит к разрыву линии Фейгенбаума [5].

2. Переход *spring area* – *crossroad area*

Для исследования структуры линий бифуркаций системы отображений Эно (1) на плоскости управляющих параметров в работе используется программа *Content* [7].

На рисунке 3 изображена структура линий бифуркаций в окрестности окна периодичности на плоскости управляющих параметров.

Вокруг точки сборки CP_1 структура линий имеет вид *spring area* на базе цикла 16. Такая же структура наблюдается и для периода 32. Следует отметить, что на рисунке 3 можно так же видеть структуры линий бифуркаций типа *crossroad area* в окрестности точек сборки CP_3 , CP'_3 , CP_4 , CP_5 и CP_6 .

Так же на рисунке 3 можно наблюдать отходящие от точек типа вырожденный *flip* CP_3 и CP'_3 линии удвоенный периода, линию жесткого перехода через мультипликатор $\mu = -1$, соединяющую эти две точки, а так же линии касательной бифуркации на базе 32-цикла.

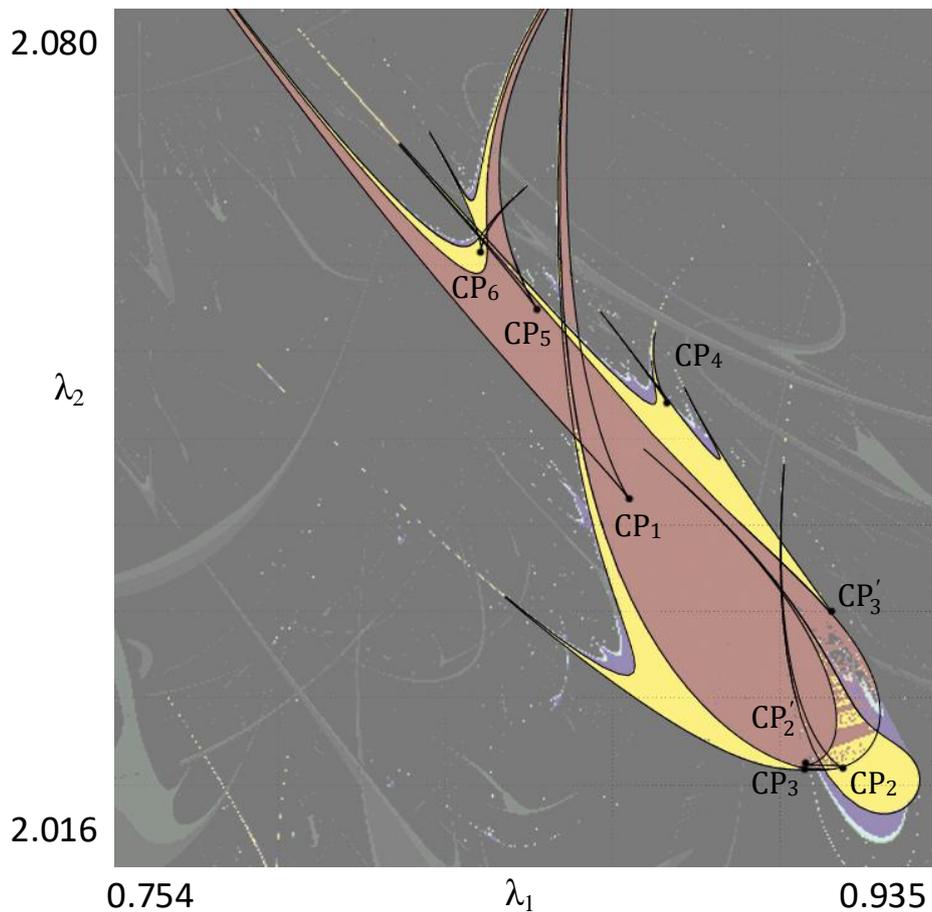


Рисунок 3. Линии бифуркаций в области окна периодичности при $b = 0.32$. CP_1 – точка сборки структуры spring area для цикла 16; CP_2 – для цикла 32; CP_2' , CP_3 , CP_3' , CP_4 и CP_6 – точки сборки для структур на базе цикла 32; CP_4 – точка сборки структуры crossroad area для 16-цикла.

При слиянии окна периодичности с основной периодической областью структура линий бифуркаций сильно меняется.

На рисунке 4 изображена структура линий бифуркаций на плоскости управляющих параметров после слияния окна периодичности. Как видно из рисунка, произошел переход от одной структуры к другой. Теперь расположение линий вокруг точки CP_1 имеет вид crossroad area для периода 16. В этом случае характерные для spring area точки типа вырожденный flip исчезают, причем точка CP_3 сливается с точкой CP_2 , образуя структуру crossroad area для периода 32. При этом точки сборки CP_2 и CP_6 более не лежат на линиях удвоения периода.

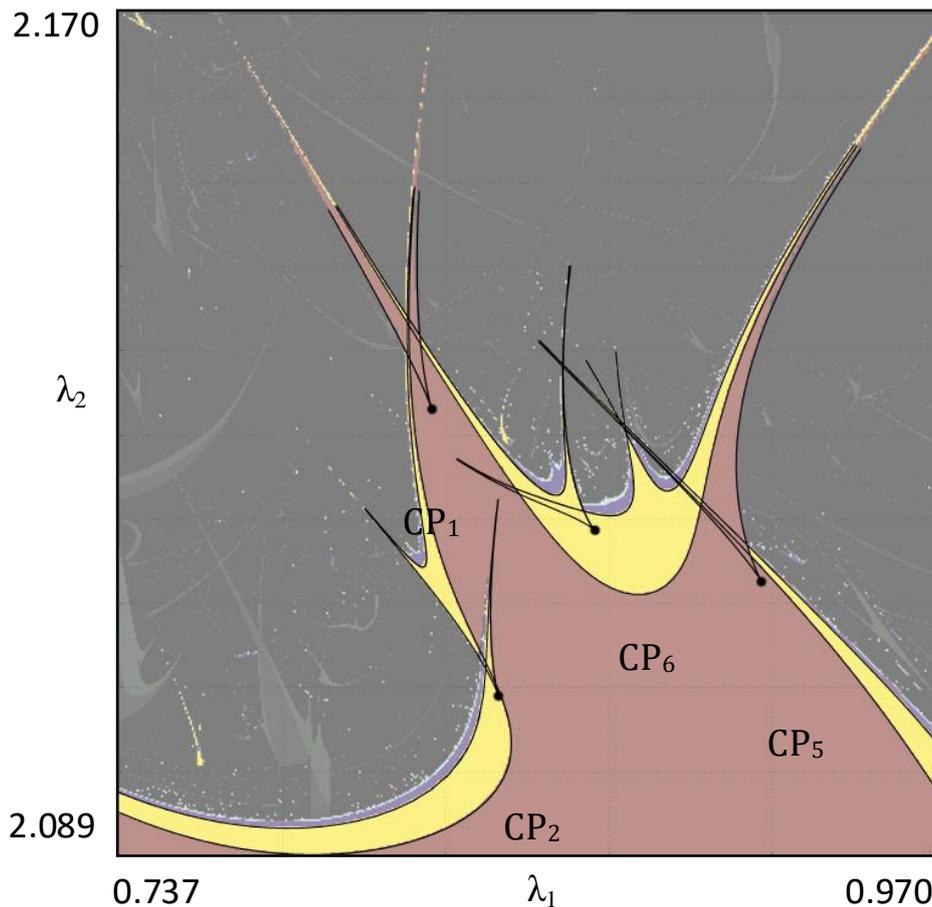


Рисунок 4. Линии бифуркаций после слияния окна периодичности при $b = 0.36$. CP_1 , CP_5 – точки сборки структур crossroad area на базе цикла периода 16; CP_2 , CP_6 – точки сборки структур crossroad area для 32-цикла.

3. Динамика линий складок

Увеличивая далее параметр диссипации можно проследить за динамикой структуры линий бифуркаций в окрестности точки сборки CP_1 .

На рисунке 5 изображено изменение линий бифуркаций вокруг точки CP_1 на плоскости управляющих параметров с изменением уровня диссипации. Точки, обозначенные на рисунке как $R1$, являются точками бифуркаций типа резонанс 1:1. В данной точке одна пара мультипликаторов по модулю меньше 1, а два других мультипликатора равны +1 [6]. Как видно из рисунка 5 при увеличении параметра диссипации в окрестности точки CP_1 появляется область неперiodической динамики. Границей области периода 16 является линия бифуркации Неймарка-Сакера.

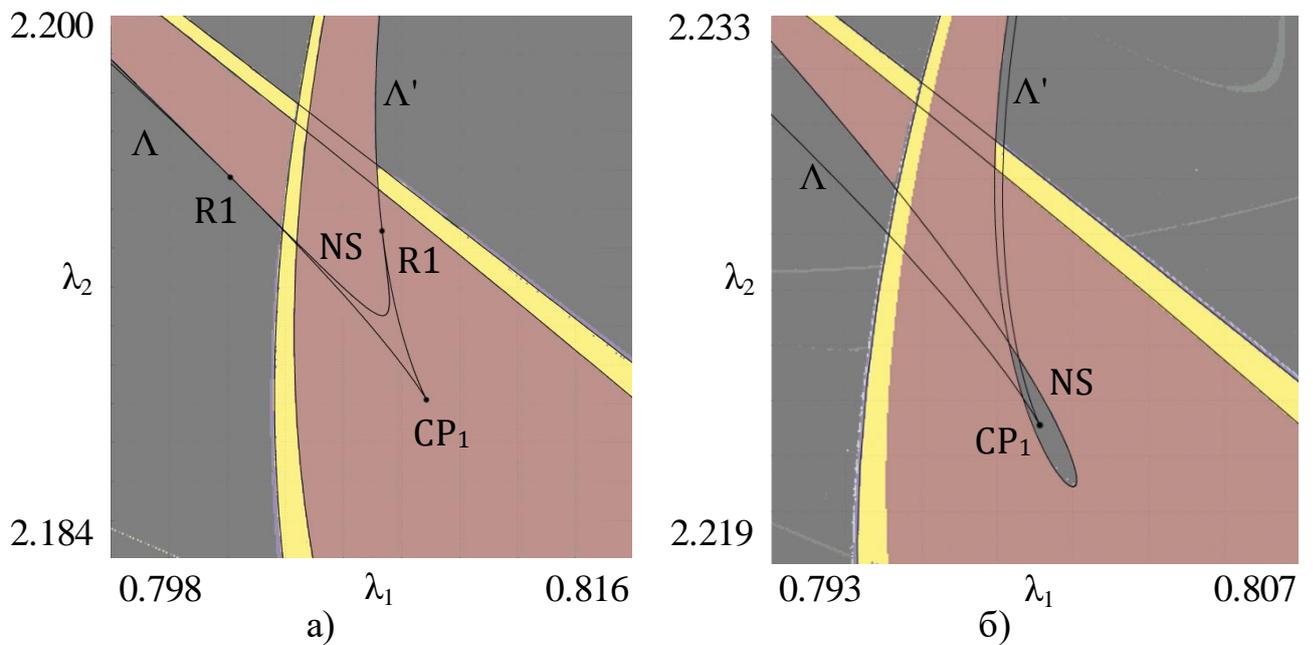


Рисунок 5. Изменение структуры линий бифуркаций на плоскости управляющих параметров для а) $b = 0.385$; б) $b = 0.4$.

Когда параметр диссипации достаточно мал, линия Неймарка-Сакера приближена к линиям складок. В этом случае на плоскости параметров можно видеть точки, где эти линии касаются (рисунок 5а). Это точки бифуркации коразмерности 2 типа резонанс 1:1. Если увеличивать параметр затухания, то линии начинают отдаляться, и точки данного типа не наблюдаются. Это можно видеть на рисунке 5б. Так же важным моментом является то, что при дальнейшем увеличении параметра диссипации линия Неймарка-Сакера образует петлю.

Заключение

В данной работе исследовалось поведение системы линейно связанных отображений Эно в зависимости от уровня диссипации. Для этой системы на плоскости управляющих параметров в области, где параметры нелинейности достаточно различимы, переход к хаосу осуществляется через каскад бифуркаций удвоения периода. Линии последующих удвоений периода в пределе стремятся к линии Фейгенбаума, за которой начинается хаотическая область.

Динамика системы в области окна периодичности во многом зависит от уровня диссипации. При увеличении параметра диссипации окно периодических режимов, находящееся в области хаоса, приближается к основной периодической области и далее сливается с ней. Это приводит к разрыву линии Фейгенбаума.

Так же когда окно периодичности сливается с основной периодической областью, наблюдается переход от структуры линий бифуркаций типа *spring area* к структуре *crossroad area* на базе определенных периодов. В это же время происходит исчезновение точек бифуркаций типа вырожденный *flip* в точках сборки.

При дальнейшем увеличении параметра диссипации в области одной из точек сборки появляется область непериодической динамики. Линия, ограничивающая эту область и область периодической динамики, является линией бифуркации Неймарка-Сакера, которая в данном случае образует петлю вокруг точки сборки структуры *crossroad area*.

Библиографический список

- 1 Кузнецов С. П. Динамический хаос. «Физматлит». 2006.
- 2 C. Bonatto and J. A. C. Gallas, *Phil. Trans. R. Soc. A* 366, 505 (2008).
- 3 E. Barreto, B. R. Hunt, C. Grebogi, and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* 78, 4561 (1997).
- 4 J. A. C. Gallas, *Phys. Rev. Lett.* 70, 2714 (1993); E. N. Lorenz, *Physica D* 237, 1689 (2008).
- 5 Dmitry V. Savin, Alexander P. Kuznetsov, Alexey V. Savin and Ulrike Feudel, Different types of critical behavior in conservatively coupled Henon maps, *PHYSICAL REVIEW E* 91, 062905 (2015).
- 6 Kuznetsov Yu. A. *Elements of applied bifurcation theory*, Springer–Verlag, 593 p (1998).
- 7 Y. A. Kuznetsov and V. V. Levitin, *CONTENT: A Multiplatform Environment for Analyzing Dynamical Systems*, Dynamical Systems Laboratory, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam (1997), available at <http://www.math.uu.nl/people/kuznet/CONTENT/>
- 8 C. Mira and J. P. Carcasses, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* 1, 641 (1991).